



# Etude et simulation numérique de la rupture dynamique des séismes par des méthodes d'éléments finis discontinus

Mondher Benjemaa

## ► To cite this version:

Mondher Benjemaa. Etude et simulation numérique de la rupture dynamique des séismes par des méthodes d'éléments finis discontinus. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2007. Français. NNT : . tel-00222870

**HAL Id: tel-00222870**

**<https://theses.hal.science/tel-00222870>**

Submitted on 29 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences  
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE DE DOCTORAT  
pour obtenir le titre de  
Docteur en Sciences  
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis  
Spécialité : Mathématiques appliquées

Présentée et soutenue par  
Mondher BENJEMAA

---

Étude et simulation numérique de la rupture  
dynamique des séismes par des méthodes  
d'éléments finis discontinus

---

Thèse préparée à l'INRIA Sophia Antipolis  
Dirigée par Serge PIPERNO & Jean VIRIEUX

Soutenue publiquement le 09 Novembre 2007 à l'INRIA Sophia Antipolis devant le jury :

Marc BONNET	Directeur de recherche CNRS	Rapporteur
Nathalie GLINSKY-OLIVIER	Chargée de recherche ENPC	Examinatrice
Serge PIPERNO	Chercheur ENPC	Directeur de thèse
René Édouard PLESSIX	Chercheur senior SHELL	Examineur
Rémi POCHAT	Directeur scientifique LCPC	Invité
Jean VIRIEUX	Professeur UNSA	Directeur de thèse
Aldo ZOLLO	Professeur Univ. NAPLES	Rapporteur

---

---

## Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'INRIA Sophia Antipolis, dans le cadre du projet CAI-MAN (CAlcul scIentifique, Modélisation et Analyse Numérique), qui est un projet commun avec l'ENPC, et en collaboration avec Géosciences Azur.

Je voudrais d'abord exprimer ma grande gratitude et mes remerciements distingués à mes directeurs de thèse Serge Piperno et Jean Virieux pour le sujet passionnant qu'ils m'ont permis d'entreprendre. Leurs conseils pertinents et leurs interventions toujours claires et avisées m'ont guidé en permanence tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier vivement Nathalie Glinsky-Olivier qui a co-encadré cette thèse. Sa disponibilité, son soutien et ses conseils aussi bien sur le plan scientifique qu'humain m'ont été d'une aide très précieuse.

J'exprime toute ma reconnaissance à tous les membres du jury, et plus particulièrement à M. Marc Bonnet et M. Aldo Zollo qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs.

Mes remerciements vont aussi à Stéphane Lanteri qui m'a beaucoup aidé et conseillé afin de déjouer les tours de l'implémentation sous architecture parallèle. Je souhaite longue vie à son nouveau projet NACHOS.

Une pensée spéciale va à Victor Manuel Cruz-Atienza. Je n'oublierai pas nos longues discussions très instructives ainsi que son soutien dans les moments difficiles. Qu'il en soit grandement remercié.

Cette thèse n'aurait pas été aussi agréable sans la présence de différentes personnes dans le labo. Je tiens à les remercier tous, à commencer par les membres de l'équipe dont j'ai fait partie : mes irremplaçables collègues de bureau Marc Bernacki et Antoine Bouquet, Adrien Catella, Hassan Fahs, Hugo Fol, Martine Chane-yook, Victorita Dolean, Gilles Scarella, Ronan Perrussel, Sabine Barrère, Monserrat Argente, Stéphanie Sorres, ainsi que ceux dont nos chemins se sont croisés : Said El kismi, Maud Poret, Grégory Beaume, Sarah Delcourte, Christian Konrad, Serge Moto mpong, ou encore les membres d'autres projets : Youssef Mesri, Louis Blanchard, Benoit Chaigne, Meriem Zghal, et je n'oublie pas mes coéquipiers de tennis de table, Paul Naoumenko et Guillaume Chazarin.

Enfin, je tiens à remercier particulièrement ma mère, ainsi que toute ma famille et mes amis, qui m'ont toujours encouragé et soutenu malgré l'éloignement géographique.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction au modèle physique</b>	<b>11</b>
Introduction . . . . .	11
1.1 Système de l'élastodynamique . . . . .	12
1.2 Conditions initiales et conditions aux limites . . . . .	13
1.3 Mécanique de la rupture dynamique . . . . .	16
1.3.1 Nucléation . . . . .	16
1.3.2 Phase instable . . . . .	16
1.3.3 Champs locaux au voisinage du front de rupture . . . . .	18
1.3.4 Force de cohésion . . . . .	20
Conclusion . . . . .	21
<b>2 Méthodes Galerkin discontinus pour l'élastodynamique</b>	<b>23</b>
Introduction . . . . .	23
2.1 Rappel sur les méthodes de type éléments finis . . . . .	24
2.2 Rappel sur les systèmes hyperboliques linéaires . . . . .	26
2.3 Équations de l'élastodynamique et changement de variables . . . . .	28
2.3.1 Changement de variables . . . . .	29
2.3.2 Symétrisation . . . . .	31
2.4 Discrétisation spatiale . . . . .	34
2.5 Discrétisation temporelle . . . . .	39
2.6 Cas particulier : la méthode volumes finis . . . . .	40
2.7 Définition et étude d'énergie . . . . .	41
Conclusion . . . . .	49
<b>3 Conditions aux limites</b>	<b>51</b>
Introduction . . . . .	51
3.1 Conditions aux limites sur la faille . . . . .	51
3.1.1 Cas des volumes finis . . . . .	56
3.1.2 Cas général . . . . .	58

---

3.2 Conditions aux limites absorbantes . . . . .	63
Conclusion . . . . .	66
<b>4 Résultats numériques</b>	<b>67</b>
Introduction . . . . .	67
4.1 Résultats 2D . . . . .	67
4.2 Résultats 3D . . . . .	85
Conclusion . . . . .	113
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>115</b>
<b>Annexes</b>	<b>121</b>
<b>A Calcul des flux absorbants</b>	<b>121</b>
A.1 Calcul de la matrice $\mathbb{M}^-$ . . . . .	122
A.2 Calcul des matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ . . . . .	126
A.2.1 Calcul de $\mathbb{A}$ . . . . .	127
A.2.2 Calcul de $\mathbb{B}$ . . . . .	127
<b>B Système d'équations</b>	<b>131</b>
B.1 Cas bidimensionnel . . . . .	132
B.1.1 Schéma discret . . . . .	132
B.1.2 Conditions aux limites . . . . .	134
B.2 Cas tridimensionnel . . . . .	139
B.2.1 Schéma discret . . . . .	140
B.2.2 Conditions aux limites . . . . .	144
B.3 Algorithme . . . . .	151
<b>C Valorisation des compétences</b>	<b>153</b>
<b>Références</b>	<b>163</b>

---

# Introduction

Pendant longtemps, les hommes ont considéré l'origine d'un tremblement de terre comme un message divin. Pour les chinois, c'était un signe de la mauvaise politique de l'Empereur. Dans la culture animiste des grecs, c'était Poséidon le responsable de tels événements. Cela n'empêchera pas des grecs comme Thalès (VI<sup>ième</sup> siècle av. J.-C.) et surtout Aristote (IV<sup>ième</sup> siècle av. J.-C.), de penser que les séismes ont une origine naturelle. Avec le temps, l'origine naturelle est de plus en plus crédible, plusieurs théories apparaissent. Le tremblement de terre de Lisbonne de 1755 au Portugal est l'un des premiers à être étudié. Il faudra attendre 1850, avec la compréhension de la tectonique des plaques pour avoir les bases de la théorie actuelle. Robert Mallet<sup>1</sup>, qui créa le terme sismologie, publia la première carte sismique du monde. Ce n'est qu'au début du XX<sup>ième</sup> siècle que l'étude approfondie des séismes commence véritablement, avec le recensement à l'échelle de la planète des tremblements de terre par Fernand Bernard<sup>2</sup> ou encore l'identification des différentes ondes sismiques par Richard Dixon Oldham<sup>3</sup>.

La sismologie est donc une science ancienne, mais dont les bases ne furent posées que de façon très récente. Les premiers modèles de fracture décrits dans la littérature [81, 82, 83] sont des modèles cinématiques simples où la zone fracturée et le glissement ayant lieu sur cette zone sont spécifiés dans le temps. Bien que ces modèles permettent de calculer des champs proches [28, 27] et lointains [146, 144], ils n'apportent cependant pas de renseignements sur le processus physique de la source et présentent certaines conséquences physiques inacceptables telles que la non-conservation de l'énergie en pointe de la faille ou la non-causalité au démarrage. Pour cette raison, le modèle dit dynamique a été introduit. Dans ces modèles, c'est la contrainte tectonique initiale et les propriétés du matériau qui déterminent le glissement entre les deux lèvres de la discontinuité que forme la zone fracturée ainsi que la vitesse de progression du front de rupture définissant cette zone.

Résoudre analytiquement les problèmes de failles, et en particulier les ruptures dynamiques, est très difficile. Seuls quelques cas de géométries simples ont trouvé des solutions analytiques. Dans les années 60 et 70, Kostrov [101, 103], Burridge [33, 32], Richards [138, 139] et autres ont étudié le cas d'une faille auto-similaire se propageant à une vitesse prédéfinie. Kostrov [102] trouva une solution analytique à la propagation spontanée d'une

---

1. Ingénieur et géologue irlandais (1810-1881).

2. Comte de Montessus de Ballore (1851-1923).

3. Diplômé de la Royal School of Mines (1858-1936).

---

faille antiplane semi-infinie. Quelques travaux récents [116, 105, 136] ont été menés autour de la rupture dynamique se propageant à une vitesse non prédéfinie, mais la solution générale pour ce problème, et en particulier en mode plan, reste difficile à calculer.

Une alternative consiste à résoudre numériquement ce genre de problème. Parmi les méthodes les plus répandues qui ont été développées dans cette discipline durant ces dernières décennies, nous pouvons citer essentiellement trois familles : les méthodes de différences finies (DF), les méthodes d'intégrales de frontière (IF) et les méthodes d'éléments finis (EF). Les méthodes DF sont en général relativement simples à implémenter et produisent des schémas numériques assez efficaces [6, 5, 97, 158, 157, 165, 111, 56]. Ces méthodes s'avèrent malheureusement insuffisantes dès qu'il s'agit de simuler des géométries complexes [166, 51]. Les méthodes IF sont très répandues parce qu'elles réduisent le nombre de dimensions du domaine à discrétiser. L'intégration ne se fait que sur les surfaces où les propriétés du milieu permettent la construction analytique de fonctions de Green [31, 3, 16, 98, 19, 20, 142, 13, 137]. Ceci est très contraignant lorsqu'il s'agit de simuler des milieux fortement hétérogènes [160, 143]. Enfin, les méthodes EF ont été pendant longtemps utilisées pour la propagation des ondes en milieux complexes [55, 14, 112, 89, 149, 167, 164, 21] mais présentent l'inconvénient de réclamer l'inversion de matrices de grandes tailles. Une nouvelle classe, les éléments spectraux (ES), a été alors introduite [70, 100, 99, 35, 37]. Elle est basée sur des interpolants locaux d'ordre supérieur et possédant à la fois la flexibilité géométrique des EF et la précision spectrale [151, 46, 161]. D'autres méthodes, de types éléments finis discontinus [44, 69, 106] ont récemment pris une place significative dans la simulation numérique de phénomènes de propagation d'ondes en électromagnétisme [12, 135, 131], en acoustique [73, 52], aéroacoustique [15, 25], élastodynamique [62, 95, 64, 132], etc. Cependant, ces méthodes dites Galerkin discontinues (GD) ont été très rarement appliquées aux cas des ruptures dynamiques [87].

Par leur caractère discontinu, les méthodes GD sont bien adaptées aux problèmes présentant des singularités, tels que les problèmes de rupture. En effet, tout comme les méthodes EF, les méthodes GD sont basées sur une discrétisation du domaine en volumes élémentaires, appelés aussi cellules, dans lesquelles des fonctions de base sont définies. La différence entre ces méthodes réside dans le fait que pour les schémas GD, les fonctions de base n'assurent aucune continuité de la solution approchée d'une cellule à l'autre. Ceci permet plus de flexibilité au niveau du choix des fonctions de base, mais aussi un moindre coût de calcul en terme d'inversion de matrices, puisque ces dernières sont diagonales par bloc. Un autre avantage des méthodes GD est qu'elles permettent de considérer, outre des maillages non structurés, des maillages non conformes. Ceci constitue un atout majeur dès qu'il s'agit d'étudier des phénomènes multi-échelles ou qui nécessitent un raffinement local [71]. Enfin, ces méthodes sont hautement parallélisables [85].

Le cas le plus simple des schémas GD est celui où les fonctions de base sont constantes et valent un dans chaque cellule. On parle alors de schéma GD- $\mathbb{P}_0$  ou schéma volumes finis (VF) [125, 43, 155, 104, 69, 106, 68]. Une nouvelle variante de schéma VF a été

---

introduite par Malika Remaki dans sa thèse de doctorat en 1999 [134]. Ce schéma, développé initialement pour les équations de Maxwell dans le domaine temporel, est basé sur une approximation centrée en espace et saute-mouton<sup>4</sup> en temps. Le schéma possède l'avantage de conserver une énergie discrète, et est stable sous une condition de type CFL (Courant-Friedrichs-Levy). Le milieu étant discrétisé en triangles en 2D et tétraèdres en 3D, qui sont considérés comme les cellules ou volumes de contrôle [107]. Nous nous sommes basés sur cette formulation pour l'adapter au système de l'élastodynamique. La validation de cette partie se trouve dans [22] et nous avons choisi de ne pas l'inclure dans ce manuscrit pour nous focaliser essentiellement sur le phénomène de la rupture proprement dite.

L'objectif de cette thèse a été le développement d'un code VF 3D avec une architecture parallèle pour la simulation de la rupture dynamique à des échelles réelles. Certaines bases, préalables à la réalisation de ce code, telles que le choix des conditions aux limites sur le bord extérieur du domaine, la bonne prise en compte des conditions aux limites sur la faille afin de modéliser un mode de rupture bien précis, et l'assurance d'une condition de stabilité du schéma n'étaient pas établies. Ainsi, nous nous sommes fixés comme objectif de construire un schéma capable de prendre en compte les différents critères cités à travers des considérations énergétiques. À partir de la définition et l'étude d'une énergie discrète du système de l'élastodynamique, nous avons pu établir, d'un côté, des conditions aux limites de type absorbant afin de simuler un domaine infini, et d'un autre côté, des conditions aux limites sur une faille située à l'intérieur du domaine de calcul et évoluant en mode cisailant au cours du temps.

Ce manuscrit se compose de cinq chapitres :

- \* Le premier chapitre est dédié principalement à la description physique du phénomène de la rupture. Ainsi, après une brève introduction aux équations de l'élastodynamique, nous mettons en place le cadre physique du problème de la rupture dynamique des séismes. Nous décrivons ensuite les lois qui gouvernent la rupture pendant son évolution et donnons la forme locale des champs au voisinage de la faille. Parmi ces lois, nous nous intéressons particulièrement à celle dite d'adoucissement par glissement<sup>5</sup>, et qui sera encore détaillée dans le chapitre 3 lors de la définition des conditions aux limites sur la faille.
- \* Dans le chapitre 2, nous présentons de manière détaillée les bases du schéma numérique que nous étudions. Nous avons choisi de formuler les équations de la façon la plus générale possible, c'est-à-dire pour un schéma GD d'ordre quelconque, même si les résultats numériques présentés dans le chapitre 4 ne sont obtenus que pour le schéma à l'ordre zéro. Nous introduisons également l'énergie discrète du système et nous présentons des résultats théoriques sur sa conservation sous une condition de type CFL.
- \* Le chapitre 3 est consacré à l'étude des conditions aux limites. À partir de l'étude

---

4. Leap-frog en anglais

5. Slip Weakening Friction (SWF).

---

d'énergie faite dans le chapitre 2, nous déduisons les conditions aux limites qu'il faut considérer sur la faille, en prenant en compte la loi SWF décrite dans le premier chapitre. Nous montrons aussi que, pour un choix précis des flux sur le bord extérieur du domaine, la variation de l'énergie est négative ou nulle, ce qui assure la stabilité en norme  $L^2$  du schéma.

- \* Dans le chapitre 4, nous illustrons les résultats des trois premiers chapitres à travers divers cas tests réalisés en deux et trois dimensions d'espace. Ces cas tests nous permettent de valider notre approche en comparant les résultats numériques avec des solutions analytiques mais aussi avec des résultats obtenus par d'autres méthodes. Ceci nous conduit à la conclusion générale de ce travail où nous esquissons les potentialités futurs grâce aux résultats trouvés.
- \* Le dernier chapitre est composé de trois annexes. Les deux premières sont dédiées au calcul explicite des divers expressions mentionnées de manière plus compacte tout au long du manuscrit, alors que la dernière annexe constitue une rétrospective sur le cadre général dans lequel s'est déroulée cette thèse.

# Chapitre 1

## Introduction au modèle physique

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.1 Système de l'élastodynamique</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1.2 Conditions initiales et conditions aux limites</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>1.3 Mécanique de la rupture dynamique</b> . . . . .	<b>16</b>
1.3.1 Nucléation . . . . .	16
1.3.2 Phase instable . . . . .	16
1.3.3 Champs locaux au voisinage du front de rupture . . . . .	18
1.3.4 Force de cohésion . . . . .	20
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>21</b>

---

### Introduction

Deux types de lois régissent usuellement la propagation des ondes sismiques à l'intérieur de la terre. D'une part, l'équation de conservation de la quantité de mouvement reliant l'accélération du milieu au gradient des contraintes, et d'autre part, des relations linéaires entre les contraintes et les déformations du milieu. Cependant, les observations des failles exposées à la surface de la terre montrent que les déformations et les structures géologiques associées aux failles ne sont pas en accord avec les lois physiques mentionnées précédemment. D'autres relations constitutives contrôlent le rapport entre les déformations et les contraintes au voisinage des failles.

Dans ce premier chapitre, nous allons introduire les équations de l'élastodynamique et nous définirons les conditions aux limites sur une faille dans le cas où le milieu est fissuré. Nous ferons également un bref tour d'horizon de la mécanique de la rupture et nous introduirons les lois de frottement sur la faille que nous considérerons lors de la rupture dynamique.



## 1.1 Système de l'élastodynamique

Dans un milieu infini, élastique, linéaire et isotrope, le mouvement d'un élément de matière est régi par les équations de l'élastodynamique :

$$\rho \partial_t^2 \vec{u} = \overrightarrow{\text{div}} \underline{\sigma} + f \quad (1.1)$$

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{div } \vec{u} \mathbb{I}_n + \mu \left( \vec{\nabla} \vec{u} + \left( \vec{\nabla} \vec{u} \right)^t \right) \quad (1.2)$$

où  $n$  est la dimension de l'espace,  $\mathbb{I}_n$  est la matrice identité,  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur déplacement,  $\underline{\sigma} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  est le tenseur symétrique des contraintes et  $f$  est l'ensemble des forces de volume que nous négligerons par la suite. Le milieu est considéré comme hétérogène avec les grandeurs suivantes le décrivant : la masse volumique locale  $\rho$  et les coefficients de Lamé locaux  $\lambda$  et  $\mu$  qui varient en fonction de l'espace et sont constants dans le temps.

En introduisant le vecteur vitesse

$$\vec{v} = \partial_t \vec{u},$$

et en dérivant par rapport au temps la loi rhéologique, le système (1.1)-(1.2) peut être transformé en un système hyperbolique du premier ordre. Nous obtenons alors le système en formulation contraintes-vitesse suivant :

$$\rho \partial_t \vec{v} = \overrightarrow{\text{div}} \underline{\sigma} \quad (1.3)$$

$$\partial_t \underline{\sigma} = \lambda \text{div } \vec{v} \mathbb{I}_n + \mu \left( \vec{\nabla} \vec{v} + \left( \vec{\nabla} \vec{v} \right)^t \right). \quad (1.4)$$

Dans un milieu homogène, la solution du système de l'élastodynamique est composée de deux types d'ondes : les ondes primaires ou de compression  $P$  et les ondes secondaires ou de cisaillement  $S$  (fig. 1.1). L'onde  $P$ , dont l'amplitude est plus petite que celle de l'onde  $S$ , se propage à la vitesse la plus rapide. Les vitesses de propagation des ondes  $P$  et  $S$  peuvent être données en fonction des paramètres du milieu par

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.5)$$

respectivement. Si nous notons  $\vec{u}^P$  et  $\vec{u}^S$  les champs de déplacement induits par les ondes  $P$  et  $S$  respectivement, alors ces champs vérifient les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}^P = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{u}^S = 0. \quad (1.6)$$

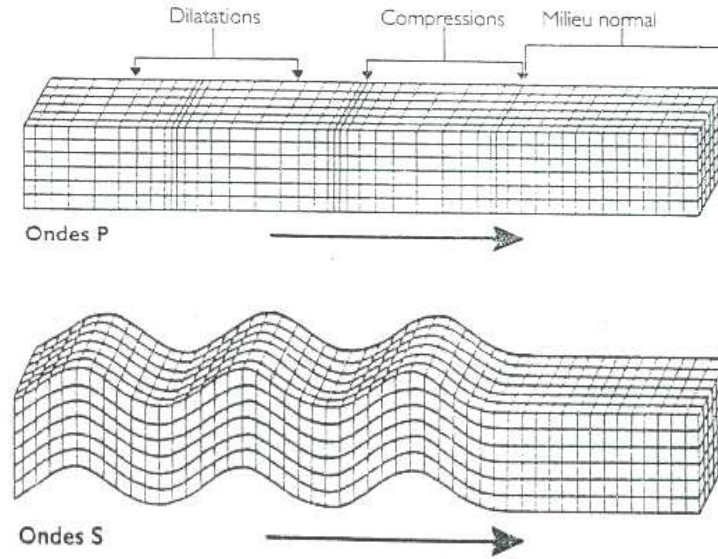


FIG. 1.1 – En haut, ondes de pression (dites aussi primaires ou longitudinales). En bas, ondes de cisaillement (dites aussi secondaires ou transversales).

**Remarque 1.1.1** Tout au long de ce document, nous allons utiliser les conventions suivantes :

- Si  $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$  désigne une matrice, et si nous notons  $(\vec{a}_j)_{1 \leq j \leq q}$  les vecteurs colonnes de  $\mathbb{A}$ , alors la divergence de  $\mathbb{A}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  défini par

$$\overrightarrow{\text{div } \mathbb{A}} = \sum_{j=1}^q \partial_j \vec{a}_j \quad (1.7)$$

- Si  $\vec{\omega} = (\omega_i)_{1 \leq i \leq p}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  et si  $\vec{\nabla} = (\partial_j)_{1 \leq j \leq q}$  désigne l'opérateur gradient de  $\mathbb{R}^q$ , alors  $\vec{\nabla} \vec{\omega}$  est une matrice définie par

$$\left( \vec{\nabla} \vec{\omega} \right)_{ij} = \partial_j \omega_i, \quad 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q \quad (1.8)$$

c'est-à-dire

$$\vec{\nabla} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \partial_1 \omega_1 & \partial_2 \omega_1 & \cdots & \partial_q \omega_1 \\ \partial_1 \omega_2 & \partial_2 \omega_2 & \cdots & \partial_q \omega_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \omega_p & \partial_2 \omega_p & \cdots & \partial_q \omega_p \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

## 1.2 Conditions initiales et conditions aux limites

Le système (1.3)-(1.4) doit être complété par des conditions initiales et aux limites afin d'assurer l'unicité de la solution. Ces conditions dépendent en général du modèle physique

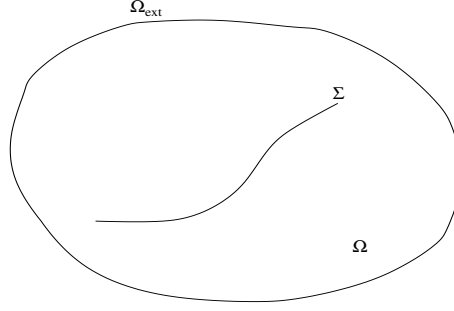


FIG. 1.2 – Une représentation du domaine  $\Omega$  en 2D. La surface de la faille est désignée par  $\Sigma$ .

étudié. Nous nous intéressons dans le présent travail aux problèmes de contact parfait avec frottement agissant sur une certaine surface, appelée faille, où une rupture peut se produire donnant lieu à des discontinuités localisées des champs élastiques. Nous allons donc spécifier les conditions initiales et aux limites liées à ce type de problème.

Considérons un milieu  $\Omega$  contenant une faille  $\Sigma$  (fig. 1.2). Ce milieu est soumis à des forces surfaciques, appelées vecteur de contraintes, et à des forces de volume comme la gravité (que nous négligeons). Comme le milieu est solide, il résiste aux chargements en accumulant de l'énergie élastique dans son volume. Une fois la résistance du milieu atteinte par ces chargements, le corps solide finit par céder le long des zones de faiblesse pré-existantes et une rupture spontanée se produit. Nous considérons l'instant qui précède le déclenchement de la rupture comme l'instant initial. Ainsi, pour les conditions initiales, les vitesses sont identiquement nulles puisque le milieu est initialement au repos, et il existe un champ de contrainte non identiquement nul, résultat de la somme d'un chargement tectonique régional et d'un champ résiduel associé à la sismicité locale préalable :

$$\begin{cases} v(0, \cdot) = 0 \\ \underline{\sigma}(0, \cdot) = \underline{\sigma}_0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.10)$$

Un modèle possible pour le processus de rupture est le relâchement des contraintes sur la faille  $\Sigma$ . En dehors de cette zone de faiblesse, le milieu se comporte élastiquement. Nous distinguons trois modes de rupture (fig. 1.3).

- Le mode I ou mode d'ouverture : ce mode est considéré comme étant le plus souvent rencontré en mécanique de la rupture pour beaucoup de matériaux. Il est aussi le plus dangereux pour l'extension d'une fissure. Cependant, une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes, la fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne [26].
- Le mode II ou mode plan : il produit des glissements parallèles au plan tangent à la fracture. La direction du glissement est normale au front de rupture.

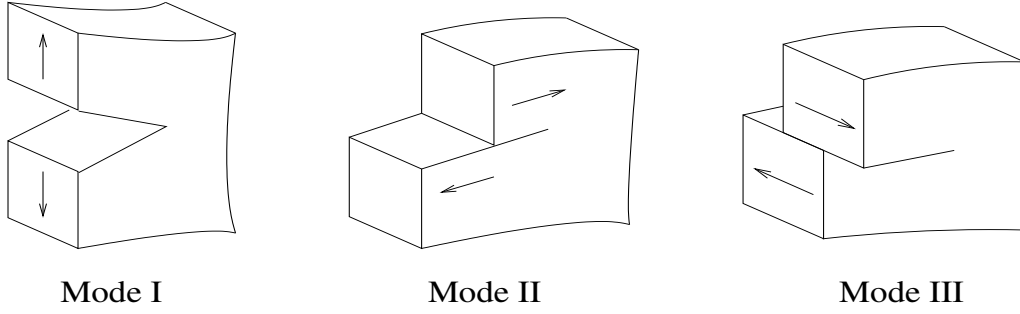


FIG. 1.3 – Modes de rupture : I ouverture, II et III cisaillement.

- Le mode III ou mode anti-plan : il produit aussi des glissements parallèles au plan tangent de la fracture, mais la direction du glissement est parallèle au front de rupture.

Les modes cisailants (c'est-à-dire les modes II et III) sont les plus souvent observés lors de la rupture des séismes dus aux chargements de confinement très importants à l'intérieur de la terre. Nous nous intéressons donc dans tout ce mémoire aux modes II et III pour lesquels seule la composante tangentielle du vecteur traction  $\vec{T} = \underline{\sigma} \vec{n}$ <sup>1</sup> sur la faille est mise à contribution durant le relâchement de contraintes.

Pendant la rupture dynamique, la faille peut évoluer en fonction du temps. Nous la noterons donc  $\Sigma(t)$ . Lorsque les contraintes dépassent la résistance du milieu, les tractions cisailantes sur la surface de rupture évoluent selon le frottement qui, à son tour, est gouverné par une loi constitutive. Cette relation constitutive dépend du temps et d'un ensemble de paramètres que nous noterons  $\Psi$ , et qui seront détaillés dans la section suivante. Les tractions imposées sur  $\Sigma(t)$  peuvent ainsi s'exprimer sous la forme :

$$\|\vec{T}_T\| = g(t, \Psi) \quad \text{sur } \Sigma(t) \quad (1.11)$$

où  $\vec{T}_T$  désigne la composante tangentielle (cisailante) du vecteur traction  $\vec{T}$ , donnée par

$$\vec{T}_T = \underline{\sigma} \vec{n} - (\vec{n} \cdot \underline{\sigma} \vec{n}) \vec{n}, \quad (1.12)$$

et  $g(t, \Psi)$  désigne la loi constitutive de frottement.

Notons aussi que, dans le cas d'un contact parfait sans ouverture<sup>2</sup>, la composante normale du vecteur traction ainsi que celle de la vitesse sont continues. Nous reviendrons sur ces différentes conditions dans le chapitre 3 lors de l'étude de l'énergie du système.

---

1.  $\vec{n}$  étant un vecteur unitaire continu normal à la faille.

2. Un contact entre deux solides est dit parfait s'il n'y a aucune adhérence au point de contact considéré.

## 1.3 Mécanique de la rupture dynamique

La mécanique de la rupture est un domaine vaste de la mécanique comme mentionné dans l'introduction. Nous abordons ici les lois simples de frottement que nous avons étudiées, sans l'ambition de faire une étude exhaustive concernant la physique possible du frottement lors d'un séisme. Rappelons toutefois que la rupture dynamique comprend une phase de nucléation difficile à modéliser et une phase de propagation que nous appelons phase instable pour éviter la confusion qu'apporte le terme propagation.

### 1.3.1 Nucléation

La nucléation est la phase d'initiation durant laquelle le mécanisme de la rupture se met en marche. Des observations réalisées en laboratoire [124, 121] ont montré qu'elle peut se dérouler en trois étapes. Une phase de nucléation quasi-statique lente, stable et survenant dans des zones de dimensions relativement restreintes par rapport à la taille globale du domaine. Une phase initiale de nucléation dynamique, lente également, et transitoire vers l'instabilité. Et enfin une phase de nucléation sismique caractérisée par une accélération exponentielle du glissement et une croissance rapide de la zone de nucléation. Cette phase précède la phase instable et partage les mêmes lois de la physique du frottement.

Plusieurs modèles de nucléation sismique ont été proposés, parmi lesquels nous pouvons citer les modèles de fracture avec cohésion [92, 57, 145], les modèles de fracture avec corrosion sous contrainte [54], les modèles SWF (Slip Weakening Friction) hétérogènes [115, 148, 122], les modèles SWF homogènes [34], les modèles RSF (Rate and State Friction) [60, 61]. La discrimination entre ces différents modèles est un sujet ouvert et l'on peut penser que l'accroissement récent des enregistrements sismiques proches des failles va permettre d'affiner la détermination de ces lois.

Bien que le problème de la nucléation soit d'une importance majeure [8], nous ne nous attarderons pas sur l'étude des effets de la nucléation sur le comportement de la solution. Nous avons opté tout au long de ce travail pour le modèle SWF homogène, qui est un modèle simple et qui ne tient pas compte de la phase quasi-statique.

### 1.3.2 Phase instable

La phase instable est la phase qui suit la nucléation. Elle est basée sur le critère de Coulomb qui établit que la rupture commence lorsque le rapport entre la contrainte cisailante  $\tau := \|\vec{T}_T\|$  et la contrainte normale  $\sigma_N = \vec{n} \cdot \underline{\sigma} \vec{n}$  est égale au coefficient de frottement statique  $\mu_s$  qui définit ainsi la cohésion locale du matériau. Une fois le critère de Coulomb vérifié, la contrainte cisailante reste proportionnelle à la contrainte normale via un coefficient de frottement  $\mu$ .

$$\tau = \mu \sigma_N. \quad (1.13)$$

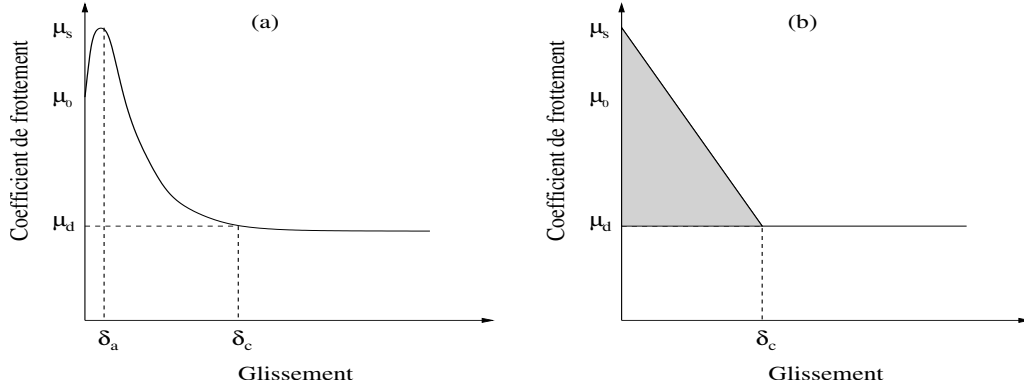


FIG. 1.4 – Loi SWF exprimant le coefficient de frottement en fonction du glissement. À droite le modèle linéarisé.

La chute du coefficient de frottement  $\mu$  de la valeur statique  $\mu_s$  vers une certaine valeur dynamique inférieure  $\mu_d$  peut suffire à engendrer une instabilité. Cependant, si cette chute a lieu instantanément, une singularité des contraintes se produit dans le front de rupture violant ainsi la physique de tout matériau qui suppose une résistance toujours finie aux contraintes. Dans la réalité, cette singularité n'existe pas et un contact cohésif existe entre les deux lèvres de la faille après la cassure proprement dite [17]. Ainsi, l'énergie de fracturation  $G$  consommée dans le voisinage du front de rupture ne l'est pas instantanément et évolue sur une zone de cohésion jusqu'au frottement dynamique modifiant l'avancement de l'instabilité [9, 10].

Ces lois de frottement tenant compte des forces de cohésion expliquent le mieux à l'heure actuelle les observations sismologiques des stations accélérométriques et les observations sur le terrain quand la faille s'exprime à la surface, ou quand une faille ancienne est exhumée. Parmi ces lois, nous pouvons distinguer deux grandes classes :

- **Loi RSF (Rate and state dependent friction)** : dans cette classe de lois, le coefficient de frottement est une fonction de la vitesse du glissement et de variables d'état [58, 94, 59, 140, 154, 114, 113, 126]. Une version simple, dite loi de Dieterich-Ruina, s'énonce comme suit :

$$\mu(V, \theta) = \mu^* + a \ln(V/V^*) + b \ln(\theta/\theta^*) \quad (1.14)$$

$$\dot{\theta} = 1 - \frac{V}{\delta_c} \quad (1.15)$$

où  $V$  est la vitesse de glissement,  $\theta$  est une variable d'état,  $\mu^*$ ,  $V^*$  et  $\theta^*$  sont des valeurs de références, et  $a$ ,  $b$  et  $\delta_c$  sont des paramètres constitutifs.

- **Loi SWF (Slip weakening friction laws)** : dans cette catégorie de lois, le coefficient de frottement est uniquement fonction du glissement [120, 123, 115, 122]. Cette loi présente en général une phase courte d'endurcissement, un pic de résistance maximale, puis une phase d'adoucissement nécessitant un certain glissement critique  $\delta_c$  pour atteindre un

### 1.3 Mécanique de la rupture dynamique

niveau de frottement résiduel stationnaire. Un modèle simple de ce comportement est

$$\mu(U) = \mu_0 + \Delta\mu \frac{U}{\delta_c} \exp\left(1 - \frac{U}{\delta_a}\right), \quad (1.16)$$

où  $\mu_0$  est une valeur de référence (nulle dans le cas d'une lubrification parfaite),  $U$  est le glissement cumulé et  $\Delta\mu$  est la chute dynamique du coefficient de frottement (fig. 1.4 (a)). Les lois SWF ont des liens directs avec les lois de cohésion [63, 18] introduites en mécanique de la fracture pour régulariser les contraintes au voisinage du front de rupture. Le modèle le plus utilisé en sismologie de par sa simplicité est le SWF linéaire [92, 9], qui s'écrit :

$$\mu(U) = \max\left[\mu_s - (\mu_s - \mu_d) \frac{U}{\delta_c}, \mu_d\right]. \quad (1.17)$$

Il inclut les ingrédients suivants : un seuil de frottement statique  $\mu_s$ , un adoucissement progressif sur une échelle de glissement caractéristique  $\delta_c$ , et un niveau dynamique résiduel  $\mu_d < \mu_s$  (fig. 1.4 (b)). Le travail réalisé par les forces de cohésion (c'est-à-dire par le frottement) durant la propagation de la rupture est proportionnel au produit de la contrainte normale à la faille et de l'intégrale de l'équation (1.17) moins le niveau résiduel donné par  $\mu_d$ .

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \int_0^{U(t)} \sigma_N (\mu(\xi) - \mu_d) d\xi \quad (1.18)$$

#### 1.3.3 Champs locaux au voisinage du front de rupture

Dans le cas d'une rupture fragile<sup>3</sup>, un développement asymptotique au voisinage du front de rupture montre que les composantes du tenseur de contrainte peuvent s'écrire en coordonnées polaires :

$$\sigma_{ij} \sim \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi(r - v_r t)}} \Sigma_{ij}^I(\theta, v_r) + \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi(r - v_r t)}} \Sigma_{ij}^{II}(\theta, v_r) + \frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi(r - v_r t)}} \Sigma_{ij}^{III}(\theta, v_r), \quad (1.19)$$

où  $v_r$  est la vitesse de propagation de la rupture, les expressions  $\Sigma_{ij}$  sont des fonctions adimensionnées représentant, pour chaque mode de fracturation, la variation angulaire du tenseur de contrainte autour de l'extrémité de la rupture quand la distance  $r$  au front de la faille tend vers 0, et les  $K_m$  sont des fonctions appelées *facteurs d'intensité de contraintes* mesurant la force de la singularité des contraintes. Tous les détails sur ces différentes quantités se trouvent dans [30, 74, 26]. Nous retenons donc que le champ des contraintes est singulier au voisinage du front de la faille ; le terme dominant est en  $1/\sqrt{r}$  (fig. 1.5).

---

3. La rupture fragile est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique, et donc par la propagation très rapide des fissures avec faible consommation d'énergie.

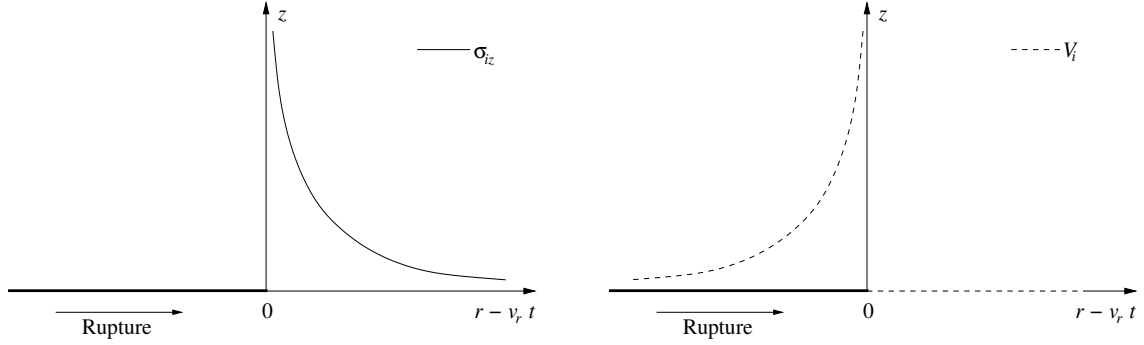


FIG. 1.5 – Singularité des champs au voisinage du front de rupture pour les modes II et III. La limite de la faille se trouve en  $r - v_r t = 0$ ,  $v_r$  étant la vitesse de propagation de la rupture.

De plus, une relation entre la vitesse de glissement  $V$  et la contrainte cisailante est donnée dans [4] (équations (15.3) et (15.4)) par

$$\sigma_{iz} = C \int_{-\infty}^0 \frac{V_i}{\xi - (r - v_r t)} d\xi, \quad i = x, y \quad (1.20)$$

où  $C$  est une constante qui dépend de  $v_r$ . Cette équation montre que la contrainte cisailante est proportionnelle à la transformée de Hilbert de la vitesse de glissement, et réciproquement. Or, dans le cas d'une relaxation totale des contraintes sur le plan de la faille, la contrainte cisailante doit être nulle à l'intérieur de la faille alors que la vitesse de glissement est nulle à l'extérieur de la faille. Les fonctions vérifiant l'équation (1.20) avec les conditions de frontière ci dessus sont données par :

$$\sigma_{iz} = \frac{K_m}{\sqrt{2\pi(r - v_r t)}} H(r - v_r t) \quad \text{et} \quad V_i = \frac{A_m v_r}{2\sqrt{v_r t - r}} H(v_r t - r) \quad (1.21)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside,  $A_m$  ( $m = II$  ou  $III$ ) sont des constantes et  $K_m$  ( $m = II$  ou  $III$ ) sont les facteurs d'intensité de contraintes associés à chaque mode de fracturation. Ainsi le champ de vitesse présente aussi une singularité en  $1/\sqrt{r}$  au voisinage du front de rupture (fig. 1.5).

La mécanique de rupture des milieux cassants<sup>4</sup> se fonde sur ces expressions locales alors que la sismologie, par l'existence d'une zone fragile complexe, opte pour une mécanique de rupture avec une zone de cohésion. Toutefois, les comportements asymptotiques de la rupture fragile peuvent nous servir de guide dans notre modélisation de la rupture sismique.

4. Un matériau est dit cassant si son allongement est inférieur à 5%.



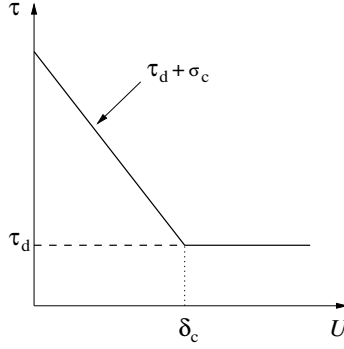


FIG. 1.6 – Bilan entre la force de cohésion  $\sigma_c$  et le frottement dynamique  $\mu_d$  en fonction du glissement  $U$ . La ligne discontinue correspond à  $\sigma_c = 0$

### 1.3.4 Force de cohésion

Le modèle présenté dans le paragraphe précédent est une abstraction en raison des singularités au voisinage du front de rupture. En effet, tout matériau possède une résistance finie et ne peut supporter un chargement au-delà de sa limite.

Ces singularités peuvent par contre être éliminées en définissant des forces de cohésions introduites par Barenblatt [17], et qui sont distribuées à l'intérieur de la faille au voisinage du front de rupture pour s'opposer aux contraintes externes. Dans cette zone, connue sous le nom de *zone de cohésion*, une force inférieure à la résistance du matériau et supérieure au niveau dynamique de frottement s'oppose à la charge extérieure. Ainsi, en tout point de la faille, la contrainte cisailante  $\tau$  est la somme d'une contrainte résiduelle  $\tau_d$  et d'une force de cohésion  $\sigma_c$ , que nous supposons désormais dépendante du glissement  $U$ .

$$\tau(r - v_r t, t) = \tau_d + \sigma_c(U(v_r t - r, t)). \quad (1.22)$$

La solution à ce problème pour lequel la singularité des contraintes disparaît au pointe de la faille dépend du choix de la fonction  $\sigma_c$ . Comme la vitesse de glissement  $V$  est proportionnelle à la transformée de Hilbert de  $\tau$  (eq. (1.20)), alors la singularité de ce champ est aussi éliminée.

La distribution du glissement à l'intérieur de la faille correspondant à une distribution donnée de la force de cohésion  $\sigma_c$  a été étudiée numériquement par Ida [92]. Parmi les différentes solutions se trouve celle où la force de cohésion décroît linéairement avec le glissement. Plus la dérivée de  $\sigma_c$  par rapport à  $U$  est faible, plus la décroissance de  $U(r)$  est lisse quand  $r - v_r t$  tend vers 0 à gauche. La figure 1.6 présente deux fonctions différentes de la force de cohésion, et la figure 1.7 décrit les distributions des contraintes (à gauche) et celles des glissements (à droite) associées à ces deux fonctions. La figure 1.7 montre qu'en présence de force de cohésion, la singularité des contraintes disparaît. De plus, étant donné que la force de cohésion est une fonction implicite du temps, alors il existe une zone de la faille dans laquelle la contrainte cisailante est inférieure à la valeur statique  $\tau_s$  et

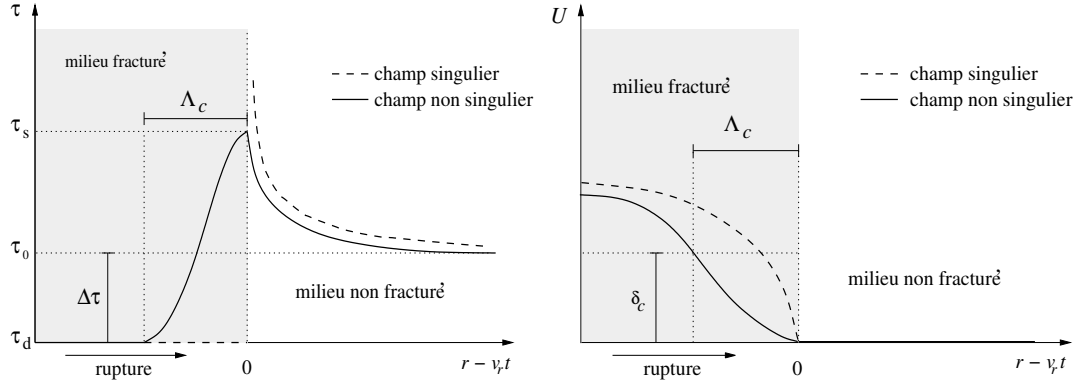


FIG. 1.7 – Singularité des champs au voisinage du front de la rupture pour les modes II et III. Le front de la faille se trouve en  $r - v_r t = 0$ .

strictement supérieure à la valeur dynamique  $\tau_d$ . C'est la zone de cohésion. La dimension  $\Lambda_c$  de cette zone est directement liée à la nature de la fonction  $\sigma_c$ . Plus la distance d'affaiblissement  $\delta_c$  est petite, plus  $\Lambda_c$  est petite. Ida [92] a montré que  $\Lambda_c$  est proportionnelle à  $\delta_c$ ,

$$\Lambda_c = \frac{-k \delta_c}{U'(x_c)}, \quad (1.23)$$

où  $x_c = r - \Lambda_c$ ,  $U'$  est la dérivée spatiale du glissement  $U$ , et  $k$  est une constante proche de deux dans le cas d'une force de cohésion linéaire. Une autre relation reliant  $\Lambda_c$  avec la longueur totale  $L$  de la faille a été donné par Andrews [11]

$$\Lambda_c = \frac{k \delta_c^2}{L} \left( \frac{\mu}{C \Delta \tau} \right)^2, \quad (1.24)$$

où  $C$  est une constante,  $\mu$  est le coefficient de Lamé et  $\Delta \tau = \tau_0 - \tau_d$  est la chute dynamique de la contrainte. Cette équation montre que, pour  $\Delta \tau$  et  $\delta_c$  constants, la dimension de la zone de cohésion éprouve une contraction, dite de Lorentz, inversement proportionnelle à la distance de propagation  $L$ . En d'autres termes, plus la longueur de la faille est grande, plus la contrainte est singulière et plus la zone de cohésion est réduite.

## Conclusion

Nous venons de présenter dans cette première partie les équations de l'élastodynamique ainsi que les conditions aux limites sur la faille pour un domaine fissuré. La réponse du milieu au voisinage de la faille n'étant pas élastique, des lois de frottement sont alors introduites afin de relier les contraintes avec le déplacement induit dans le voisinage proche de la surface de la rupture. Parmi ces lois, nous avons choisi d'appliquer le modèle d'affaiblissement par glissement (SWF) pour lequel le frottement sur la faille est donné en fonction

du glissement. Ce modèle, largement utilisé dans la communauté géophysique, a l'avantage d'être simple et reste comparable du point de vue dynamique au modèle RSF [42].

La géométrie de la faille joue un rôle important lors de l'évolution de la rupture sismique [49]. Ainsi, par exemple, lorsque le front de rupture rencontre des variations d'orientations relativement abruptes, des diffractions hautes fréquences sont émises, diminuant ainsi l'énergie disponible pour continuer la propagation<sup>5</sup> [109, 156, 110]. Les méthodes numériques les plus appropriées pour résoudre ce genre de problème seraient donc celles ayant la faculté de suivre au mieux les géométries éventuellement complexes des failles, tout en considérant des milieux hétérogènes. D'un autre côté, il est plus judicieux de considérer des méthodes qui tiennent compte des discontinuités des champs à travers la surface de la faille. Les méthodes Galerkin discontinues en général et les méthodes volumes finis en particulier semblent donc appropriées à ce type de problème, puisqu'elles permettent une certaine flexibilité au niveau des maillages et, de par leur caractère discontinu, peuvent suivre d'éventuels sauts des champs à travers la surface en question.

La suite de ce travail sera consacrée à la présentation du schéma numérique utilisé ainsi qu'à la déduction formelle des conditions aux limites sur la faille suivant la loi SWF que nous venons d'exposer.

---

5. Ces diffractions sont aussi dues à la variation forte de la contrainte normale.

## Chapitre 2

# Méthodes Galerkin discontinus pour l'élastodynamique

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2.1 Rappel sur les méthodes de type éléments finis</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>2.2 Rappel sur les systèmes hyperboliques linéaires</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>2.3 Équations de l'élastodynamique et changement de variables</b> .	<b>28</b>
2.3.1 Changement de variables . . . . .	29
2.3.2 Symétrisation . . . . .	31
<b>2.4 Discrétisation spatiale</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>2.5 Discrétisation temporelle</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>2.6 Cas particulier : la méthode volumes finis</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>2.7 Définition et étude d'énergie</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>49</b>

---

## Introduction

Les méthodes de type Galerkin discontinus (GD) connaissent de nos jours un intérêt croissant grâce aux améliorations considérables des performances de calcul des machines. Ces méthodes, développées initialement dans les années 70 pour la résolution de l'équation de transport des neutrons [133], ont été formalisées un an plus tard pour cette même équation [141]. Elles sont aujourd'hui utilisées dans de nombreux domaines comme l'électromagnétisme [85, 84, 38, 72], l'aéroacoustique [24, 152], l'élastohydrodynamique [108], la physique quantique [163], le transport en milieux poreux [150], la propagation d'ondes [2, 7, 129], l'équation de la chaleur [162], etc. Cependant, leur application aux problèmes

d'élasticité linéaire est assez récente [95, 64, 96, 45] voire, à notre connaissance, très rare pour le problème de rupture [87].

Nous introduisons dans cette section un schéma GD, avec des flux centrés en espace, pour les équations de l'élastodynamique, et nous montrons que, sous une condition de type CFL, ce schéma est stable et conserve une énergie discrète.

## 2.1 Rappel sur les méthodes de type éléments finis

Ce paragraphe constitue une brève introduction aux méthodes de type éléments finis. La littérature sur ce sujet étant abondante (voir par exemple [44, 88, 91, 67, 29, 40, 39, 127] parmi d'autres), nous allons nous limiter à un rappel sur les principes généraux de cette théorie.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W \text{ tel que} \\ a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2.1)$$

avec

- (i)  $W$  et  $V$  sont deux espaces de Hilbert, munis respectivement des normes  $\| \cdot \|_W$  et  $\| \cdot \|_V$ . L'espace  $W$  est appelé espace solution alors que  $V$  est appelé espace test.
- (ii)  $a : W \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue.
- (iii)  $f \in V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$  est une application linéaire continue (pour simplifier les écritures, nous écrivons  $f(v)$  à la place de  $\langle f, v \rangle_{V', V}$ ).

Ce problème est dit *bien posé au sens de Hadamard* s'il admet une unique solution  $u$ , et si l'estimation a priori suivante est vérifiée

$$\exists c > 0, \forall f \in V', \quad \| u \|_W \leq c \| f \|_{V'}$$

La forme bilinéaire  $a$  provient en général de la formulation faible d'une équation aux dérivées partielles posée sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  avec des conditions aux limites sur son bord  $\partial \Omega$ .

Dans le cas où l'espace des solutions et l'espace test sont identiques, nous avons le théorème bien connu de Lax-Milgram

**Théorème 2.1.1** *Si la forme bilinéaire  $a$  est coercive, c'est-à-dire*

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, \quad a(u, u) \geq \alpha \| u \|_V^2$$

*alors le problème (2.1) est bien posé avec l'estimation a priori*

$$\forall f \in V', \quad \| u \|_V \leq \frac{1}{\alpha} \| f \|_{V'}.$$

Et plus généralement, si  $W \neq V$ , nous avons le théorème de Banach-Nečas-Babuška

**Théorème 2.1.2** *Le problème (2.1) est bien posé si et seulement si*

$$\exists \alpha > 0, \quad \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha.$$

De plus, l'estimation a priori suivante est vérifiée

$$\forall f \in V', \quad \|u\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}.$$

L'idée principale derrière les méthodes de type Galerkin est de remplacer les espaces  $W$  et  $V$  par des espaces de dimensions finies  $W_h$  et  $V_h$ , appelés aussi espace solution et espace test respectivement. L'indice  $h$  faisant référence à la discrétisation du domaine par un maillage. Ainsi les méthodes de type Galerkin consistent à construire une approximation de  $u$  en résolvant le problème approché suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in W_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $a_h$  est une approximation de la forme bilinéaire  $a$ , et  $f_h$  est une approximation de la forme linéaire  $f$ .

**Remarque 2.1.1** *L'approximation est dite conforme si  $W_h \subset W$  et  $V_h \subset V$ . Elle est dite non conforme dans le cas contraire.*

Un cas particulier de (2.2) est lorsque le même espace d'approximation est choisi pour la solution et les fonctions test, ce qui donne :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce cas est appelé méthode de Galerkin standard. Le cas où les espaces sont différents est appelé méthode Petrov-Galerkin, ou parfois méthode de Galerkin non standard. Les méthodes de type Galerkin discontinus s'inscrivent dans la catégorie des approximations non conformes. La résolution du système (2.3) se réduit maintenant à une simple résolution d'un système linéaire. En effet, posons  $M = \dim W_h$  et  $N = \dim V_h$ , et soient  $\{\psi_1, \dots, \psi_M\}$  une base de  $W_h$  et  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  une base de  $V_h$ , alors  $u_h$  peut s'écrire :

$$u_h = \sum_{i=1}^M u_i \psi_i.$$

Notons  $\vec{U} \in \mathbb{R}^M$  le vecteur  $u_h$  exprimé dans la base  $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq M}$ , c'est-à-dire

$$\vec{U} = (u_1, \dots, u_M)^t,$$

## 2.2 Rappel sur les systèmes hyperboliques linéaires

---

et  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)^t \in \mathbb{R}^N$  le vecteur défini par

$$f_i = f_h(\varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N$$

et  $\mathbb{M} \in \mathbb{M}_{N,M}(\mathbb{R})$  la matrice définie par :

$$\mathbb{M}_{ij} = a_h(\psi_j, \varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M,$$

alors nous avons l'équivalence :

$$u_h \text{ est solution de (2.3)} \iff \mathbb{M} \vec{U} = \vec{f}.$$

Les fonctions  $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq M}$  sont appelées les fonctions de bases, les fonctions  $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq N}$  sont les fonctions test et les quantités  $\{u_i\}_{1 \leq i \leq M}$  sont les degrés de liberté.

## 2.2 Rappel sur les systèmes hyperboliques linéaires

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  à bord Lipschitzien. Soient  $(\mathbb{A}_i(x))_{1 \leq i \leq m}$  des matrices de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , et soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur de dérivation défini par :

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \mathbb{A}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Soit  $T > 0$  un réel ( $T$  peut être infini). On cherche à trouver une fonction  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  solution du problème :

$$\mathcal{L} u = f \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (2.4)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.5)$$

$$\mathbb{B}(x) u = g \quad \text{dans } \partial\Omega \times [0, T] \quad (2.6)$$

avec  $f \in (L^2(\Omega \times [0, T]))^n$ ,  $g \in (L^2(\partial\Omega \times [0, T]))^m$ ,  $u_0 \in (L^2(\Omega))^n$  et  $\mathbb{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

Tout d'abord, commençons par rappeler les quelques définitions suivantes :

**Définition 2.2.1** L'opérateur  $\mathcal{L}$  est dit **hyperbolique** si la condition suivante est vérifiée :

$$\sup_{x \in \Omega} \|\exp(i \mathbb{A}(x))\| < +\infty \quad (2.7)$$

où  $\mathbb{A}(x)$  est la matrice

$$\mathbb{A}(x) = \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{A}_i \quad (2.8)$$

Cette définition est équivalente au théorème suivant :

### Théorème 2.2.1

1.  $\forall x \in \Omega$ ,  $\mathbb{A}(x)$  est diagonalisable à valeurs propres réelles, c'est-à-dire il existe une matrice diagonale  $\mathbb{D}(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$ , et une matrice  $\mathbb{P}(x) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$\mathbb{A}(x) = \mathbb{P}(x)^{-1} \mathbb{D}(x) \mathbb{P}(x) \quad (2.9)$$

et

2. La diagonalisation de  $\mathbb{A}(x)$  peut se faire de façon uniforme, c'est-à-dire

$$\sup_{x \in \Omega} \|\mathbb{P}(x)^{-1}\| \|\mathbb{P}(x)\| < +\infty \quad (2.10)$$

### Définition 2.2.2

- L'opérateur  $\mathcal{L}$  est dit **symétrique** (au sens de Friedrichs) si les matrices  $(\mathbb{A}_i(x))_{1 \leq i \leq m}$  sont symétriques pour tout  $x \in \Omega$ .
- L'opérateur  $\mathcal{L}$  est dit **symétrisable** s'il existe une matrice symétrique définie positive  $\mathbb{S} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  telle que les matrices  $(\mathbb{S}(x) \mathbb{A}_i(x))_{1 \leq i \leq m}$  sont symétriques pour tout  $x \in \Omega$ .

Nous allons distinguer deux cas :

#### 1<sup>er</sup> cas : $\Omega = \mathbb{R}^m$

L'équation (2.6) n'est donc pas nécessaire dans ce cas. Nous avons alors la proposition suivante :

**Proposition 2.2.1** Si  $\mathcal{L}$  est symétrique (ou symétrisable) alors le système (2.4)-(2.5) admet une solution unique dans  $(L^2(\Omega \times [0, T]))^n$ .

**Preuve 2.2.1** Il y a plusieurs façons pour démontrer cette proposition. Une manière de faire consiste à trouver une énergie (i.e. forme quadratique définie positive en les variables du système) qui se conserve. Dans le cas où  $\mathcal{L}$  est symétrique (resp. symétrisable) il suffit de considérer la quantité  $E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^t)^t u$  (resp.  $E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^t)^t \mathbb{S} u$ ).  $E$  est bien une forme quadratique définie positive, et un calcul rapide montre que  $\frac{dE}{dt} = 0$ , d'où le résultat.

**Remarque 2.2.1** La proposition précédente reste valable dans le cas où les  $\mathbb{A}_i$  dépendent en plus du temps. Cependant, l'existence de la solution ne peut être assurée dans ce cas que pour des temps finis. La démonstration est très technique et le lecteur désirant plus de détails peut se rapporter à [147] pour une preuve complète.



## 2.3 Équations de l'élastodynamique et changement de variables

2<sup>ème</sup> cas :  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^m$

### Définition 2.2.3

- On dit que la condition aux limites (2.6) est strictement dissipative si la restriction de la forme quadratique  $w \rightarrow (w^t) \mathbb{A}(\vec{n}(x), x) w$  au noyau de  $\mathbb{B}(x)$  est définie positive, c'est-à-dire

$$w \in \ker \mathbb{B}(x) - \{0\} \implies w \rightarrow (w^t) \mathbb{A}(\vec{n}(x), x) w > 0$$

$$\text{avec } \mathbb{A}(\vec{n}(x), x) = \sum_{i=1}^m n_i \mathbb{A}_i(x).$$

- On dit que la condition aux limites (2.6) est maximale en  $x$  si  $\ker \mathbb{B}(x)$  est maximal (pour l'inclusion) parmi les sous espaces sur lesquels  $\mathbb{A}(\vec{n}(x), x) \geq 0$ .

**Proposition 2.2.2** Sous les conditions des définitions 2.2.2 et 2.2.3, et si  $\mathbb{B}$  est surjective (c'est-à-dire de rang maximal) alors le système (2.4)-(2.5)-(2.6) admet une solution unique dans  $(L^2(\Omega \times [0, T]))^n$ .

**Remarque 2.2.2** Les conditions de la proposition 2.2.2 peuvent être affaiblies dans le cas homogène (c'est-à-dire  $g = 0$ ). D'autres variantes existent aussi dans le cas où les matrices  $\mathbb{A}_i$  dépendent en plus du temps. Plus de détails sur les démonstrations complètes se trouvent dans [128] et [147].

## 2.3 Équations de l'élastodynamique et changement de variables

Pour un espace de dimension trois, le tenseur de contraintes s'écrit sous la forme

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

En raison de sa symétrie, il est parfois préférable d'écrire le tenseur de contraintes sous une forme vectorielle. Posons alors

$$\vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^t.$$

Introduisons également le vecteur  $\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}$  combinant les grandeurs indépendantes de vitesse et de contrainte. Le système (1.3)-(1.4) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\partial_t \vec{X} = \left( \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \mathbb{A}_\alpha \partial_\alpha \right) \vec{X}, \quad (2.12)$$

avec

$$\mathbb{A}_x = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbb{O}_3 & & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & & & & & & \\ \lambda & 0 & 0 & & & & & & \\ \lambda & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & \mu & 0 & & & \mathbb{O}_6 & & & \\ 0 & 0 & \mu & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}_y = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ & \mathbb{O}_3 & & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \lambda & 0 & & & & & & \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & & & & & & \\ 0 & \lambda & 0 & & & & & & \\ \mu & 0 & 0 & & & \mathbb{O}_6 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & \mu & & & & & & \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbb{A}_z = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ & \mathbb{O}_3 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda & & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \mathbb{O}_6 & & & \\ \mu & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & \mu & 0 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Comme la densité  $\rho$  et les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  varient en fonction de l'espace, les matrices  $\mathbb{A}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{x, y, z\}$  dépendent alors des variables spatiales, et l'équation (2.12) est donc non conservative.

### 2.3.1 Changement de variables

Afin d'écrire l'équation (2.12) sous une forme conservative (ou pseudo-conservative), nous allons considérer le changement de variables suivant :

$$\vec{\sigma} = \mathbb{R} \vec{\sigma} \quad (2.13)$$

### 2.3 Équations de l'élastodynamique et changement de variables

avec

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \mathbb{O}_3 & \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & \\ & \mathbb{O}_3 & & \mathbb{I}_3 & \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

En notant de même  $\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ , l'équation (2.12) est équivalente à :

$$\Lambda \partial_t \vec{X} = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha \left( \tilde{\mathbb{A}}_\alpha \vec{X} \right), \quad (2.15)$$

avec

$$\Lambda = \text{diag} \left( \rho, \rho, \rho, \frac{3}{3\lambda + 2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \right), \quad (2.16)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_x = \begin{pmatrix} & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbb{O}_3 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 2 & 0 & 0 & & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \mathbb{O}_6 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_y = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \mathbb{O}_3 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & & \mathbb{O}_6 & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

et

$$\tilde{\mathbb{A}}_z = \begin{pmatrix} & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \mathbb{O}_3 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \mathbb{O}_6 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Ce changement de variables permet donc d'écrire le système (2.12) sous une forme pseudo-conservative. Tous les coefficients caractérisant le milieu, et pouvant varier spatialement, sont groupés dans le terme à gauche de l'équation (2.15), alors que les matrices  $\tilde{\mathbb{A}}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{x, y, z\}$  sont constantes.

**Remarque 2.3.1** *Le changement de variables ci-dessus est obtenu en écrivant le tenseur de contrainte sous la forme*

$$\underline{\sigma} = \mathbb{T} + \mathbb{D}$$

où

$$\mathbb{T} = \frac{\text{tr}(\underline{\sigma})}{3} \mathbb{I}_3$$

*est un tenseur sphérique (ou de trace), et*

$$\mathbb{D} = \underline{\sigma} - \mathbb{T}$$

*est un tenseur déviatorique.*

### 2.3.2 Symétrisation

Le système (2.15) n'est cependant pas symétrique (dans le sens où les matrices  $\tilde{\mathbb{A}}_\alpha$  ne sont pas symétriques), mais symétrisable. Il est plus intéressant, comme nous le verrons par la suite, de manipuler des matrices symétriques. Nous allons donc chercher une matrice symétrique définie positive  $\mathbb{S}_0$  telle que, en multipliant à gauche l'équation (2.15) par  $\mathbb{S}_0$ , les matrices  $\mathbb{S}_0 \tilde{\mathbb{A}}_\alpha$  soient symétriques. En remarquant que la non symétrie de ces matrices ne concerne que leurs 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> lignes et colonnes, alors un calcul simple montre qu'il suffit

## 2.3 Équations de l'élastodynamique et changement de variables

de considérer la matrice

$$\mathbb{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Le système (2.15) peut alors s'écrire sous la forme pseudo-conservative,

$$\Lambda_0 \partial_t \vec{X} = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha \left( \mathbf{S}_\alpha \vec{X} \right), \quad (2.21)$$

avec  $\Lambda_0 = \mathbb{S}_0 \Lambda$  et  $\mathbf{S}_\alpha = \mathbb{S}_0 \tilde{\mathbf{A}}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{x,y,z\}$ .

Le système ainsi obtenu est Friedrichs-symétrique, ce qui assure, pour des choix appropriés de conditions initiales et aux limites, l'existence et l'unicité de la solution [75, 76, 65, 66, 147].

**Remarque 2.3.2** *Pour alléger les notations, nous omettrons dans la suite le symbole tilde sur les vecteurs. Le vecteur de contraintes sera donc noté*

$$\vec{\sigma} = (\omega, \omega', \omega'', \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^t$$

et

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

avec

$$\omega = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \quad \omega' = \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \quad \text{et} \quad \omega'' = \frac{1}{3}(-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}).$$

Avec ces notations, nous avons le système pseudo-conservatif suivant :

$$\Lambda_0 \partial_t \vec{X} = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \partial_\alpha \left( \mathbf{S}_\alpha \vec{X} \right), \quad (2.22)$$

où les différentes matrices sont données par

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \rho \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_{3,6} \\ \mathbb{O}_{6,3} & \Lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_3 & \mathbb{M}_\alpha \\ \mathbb{N}_\alpha & \mathbb{O}_6 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \{x,y,z\},$$

avec

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{3\lambda+2\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\mu} & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbb{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\mathbb{M}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\mathbb{M}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

et  $\mathbb{N}_\alpha = \mathbb{M}_\alpha^t$  pour tout  $\alpha \in \{x, y, z\}$ .

Le système (2.22) peut s'écrire aussi en variables découplées :

$$\rho \partial_t \vec{v} = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \partial_\alpha (\mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}) \quad (2.27)$$

$$\Lambda_0 \partial_t \vec{\sigma} = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \partial_\alpha (\mathbb{N}_\alpha \vec{v}). \quad (2.28)$$

Et finalement, si nous désignons par  $\vec{F}$  et  $\vec{G}$  les fonctions définies respectivement dans  $\mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{M}_{6,3}(\mathbb{R})$  par

$$\vec{F}(\vec{\sigma}) = (\mathbb{M}_x \vec{\sigma}, \mathbb{M}_y \vec{\sigma}, \mathbb{M}_z \vec{\sigma})$$

et

$$\vec{G}(\vec{v}) = (\mathbb{N}_x \vec{v}, \mathbb{N}_y \vec{v}, \mathbb{N}_z \vec{v}),$$

alors le système (2.27)-(2.28) est équivalent au système suivant :

$$\rho \partial_t \vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{div} \vec{F}(\vec{\sigma})} \quad (2.29)$$

$$\Lambda_0 \partial_t \vec{\sigma} = \overrightarrow{\operatorname{div} \vec{G}(\vec{v})}. \quad (2.30)$$

## 2.4 Discrétisation spatiale

Le principe général des méthodes GD consiste à rechercher les solutions approchées du problème sous la forme d'une combinaison linéaire (donnée par les degrés de liberté) de fonctions de bases locales dans chaque cellule. Le critère discontinu permet une indépendance de ces degrés de liberté entre les cellules, et donc le champ approché peut être discontinu à l'interface entre deux cellules voisines. Une fonction de flux numérique est alors définie pour approcher le flux à travers les interfaces partagées avec les cellules voisines.

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . Supposons que l'on dispose d'une partition de  $\Omega$  en un nombre fini de polyèdres. Chaque polyèdre  $\mathcal{T}_i$  est appelé *volume de contrôle* ou *cellule*.

Pour simplifier l'écriture des équations, nous adopterons dans la suite les notations suivantes :

1.  $\partial\Omega$  : frontière du domaine  $\Omega$ .
2.  $V_i = \int_{\mathcal{T}_i} dV$  : volume de la cellule  $\mathcal{T}_i$ .
3.  $V(i)$  : ensemble des cellules voisines de la cellule  $\mathcal{T}_i$  (c'est-à-dire ayant au moins une interface commune avec  $\mathcal{T}_i$ ).
4.  $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$  : interface entre deux cellules voisines  $\mathcal{T}_i$  et  $\mathcal{T}_k$ .
5.  $S_{ik} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} dS$  : surface de l'interface  $\mathcal{T}_{ik}$ .
6.  $S_i = \sum_{k \in V(i)} S_{ik}$  : périmètre de la cellule  $\mathcal{T}_i$ .
7.  $\vec{n}_{ik} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{n}_{ik} dS$ , où  $\vec{n}_{ik}$  est le vecteur normal unitaire à  $S_{ik}$  dirigé de  $\mathcal{T}_i$  vers  $\mathcal{T}_k$ .

Sur chaque cellule  $\mathcal{T}_i$ , on se donne deux espaces vectoriels  $\mathcal{P}_i$  et  $\mathcal{Q}_i$  de dimension  $d_i$ , engendrés par des fonctions de bases locales  $\vec{\varphi}_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ , pour le champ de vitesse  $\vec{v}$ , et  $\vec{\psi}_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ , pour le champ de contrainte  $\vec{\sigma}$ .  $d_i$  correspond au nombre de degrés de liberté du champ sur la cellule  $\mathcal{T}_i$ . Ainsi, dans la cellule  $\mathcal{T}_i$ , les champs de vitesse et de contrainte sont représentés sous la forme

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{d_i} v_{ij} \vec{\varphi}_{ij} \quad (2.31)$$

$$\vec{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{d_i} \sigma_{ij} \vec{\psi}_{ij}, \quad (2.32)$$

où  $v_{ik}$  et  $\sigma_{ik}$  désignent le  $k^{\text{ième}}$  degré de liberté de  $\vec{v}_i$  et  $\vec{\sigma}_i$  respectivement, et sont des grandeurs scalaires constantes en espace dans la cellule  $\mathcal{T}_i$ .

Comme mentionné précédemment, les fonctions de bases n'assurent aucune continuité des champs entre deux cellules voisines.

Les champs de vitesse et de contrainte dans  $\Omega$  sont donc approchés par

$$\vec{v} \simeq \sum_i \vec{v}_i = \sum_i \sum_{k=1}^{d_i} v_{ik} \vec{\varphi}_{ik} \quad (2.33)$$

$$\vec{\sigma} \simeq \sum_i \vec{\sigma}_i = \sum_i \sum_{k=1}^{d_i} \sigma_{ik} \vec{\psi}_{ik}. \quad (2.34)$$

Multiplions l'équation (2.29) par une fonction test  $\vec{\varphi}_{ij}$  et l'équation (2.30) par une fonction test  $\vec{\psi}_{ij}$  (nous choisissons donc un espace test égal à l'espace solution), et intégrons sur la cellule  $\mathcal{T}_i$ . Nous obtenons le système :

$$\int_{\mathcal{T}_i} \rho \vec{\varphi}_{ij} \cdot \partial_t \vec{v} = \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \overrightarrow{\text{div } \vec{F}(\vec{\sigma})} \quad (2.35)$$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij} \cdot \Lambda_0 \partial_t \vec{\sigma} = \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij} \cdot \overrightarrow{\text{div } \vec{G}(\vec{v})}, \quad (2.36)$$

le point représentant le produit scalaire. Une intégration par parties donne

$$\int_{\mathcal{T}_i} \rho \vec{\varphi}_{ij} \cdot \partial_t \vec{v} = - \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}(\vec{\sigma}) + \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \left( \vec{F}(\vec{\sigma}) \vec{n} \right) \quad (2.37)$$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij} \cdot \Lambda_0 \partial_t \vec{\sigma} = - \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} \vec{\psi}_{ij} : \vec{G}(\vec{v}) + \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij} \cdot \left( \vec{G}(\vec{v}) \vec{n} \right), \quad (2.38)$$

avec

$$\vec{\nabla} \vec{w} = \begin{pmatrix} \partial_x w_1 & \partial_y w_1 & \partial_z w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x w_d & \partial_y w_d & \partial_z w_d \end{pmatrix} \quad \textcolor{red}{1}$$

pour tout vecteur  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_d)^t \in \mathbb{R}^d$ , et

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} b_{ij}$$

pour toutes matrices  $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  et  $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ .

Ainsi, le système (2.37)-(2.38) peut être approché par

$$\int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \vec{\varphi}_{ij} \cdot \partial_t \vec{v}_i = - \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}(\vec{\sigma}_i) + \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \left( \vec{F}(\vec{\sigma}_{/\partial \mathcal{T}_i}) \vec{n} \right) \quad (2.39)$$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij} \cdot \Lambda_{0_i} \partial_t \vec{\sigma}_i = - \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} \vec{\psi}_{ij} : \vec{G}(\vec{v}_i) + \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij} \cdot \left( \vec{G}(\vec{v}_{/\partial \mathcal{T}_i}) \vec{n} \right), \quad (2.40)$$

---

1. cf. remarque 1.1.1.



où  $\vec{F}(\vec{\sigma}_{/\partial\mathcal{T}_i})$  et  $\vec{G}(\vec{v}_{/\partial\mathcal{T}_i})$  sont des approximations de  $\vec{F}(\vec{\sigma})$  et  $\vec{G}(\vec{v})$  respectivement, sur l'interface  $\partial\mathcal{T}_i$ , et  $\rho_i$  et  $\Lambda_{0_i}$  sont des approximations constantes en espace de la densité et des coefficients de Lamé dans la cellule  $\mathcal{T}_i$ .

Nous utilisons des flux centrés en espace, c'est-à-dire si  $\mathcal{T}_k$  désigne une cellule voisine de  $\mathcal{T}_i$ , alors nous faisons les approximations :

$$\vec{F}(\vec{\sigma}_{/\mathcal{T}_{ik}}) \simeq \vec{F}\left(\frac{\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k}{2}\right) \quad \text{et} \quad \vec{G}(\vec{v}_{/\mathcal{T}_{ik}}) \simeq \vec{G}\left(\frac{\vec{v}_i + \vec{v}_k}{2}\right). \quad (2.41)$$

Comme  $\vec{F}$  et  $\vec{G}$  sont linéaires et ne dépendent pas de la cellule  $\mathcal{T}_i$  (rappelons que les matrices  $\mathbb{M}_\alpha$  et  $\mathbb{N}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{x, y, z\}$  sont constantes), alors nous pouvons écrire

$$\vec{F}(\vec{\sigma}_{/\mathcal{T}_{ik}}) \simeq \frac{1}{2} \left( \vec{F}(\vec{\sigma}_i) + \vec{F}(\vec{\sigma}_k) \right) \quad \text{et} \quad \vec{G}(\vec{v}_{/\mathcal{T}_{ik}}) \simeq \frac{1}{2} \left( \vec{G}(\vec{v}_i) + \vec{G}(\vec{v}_k) \right). \quad (2.42)$$

Ainsi, le système (2.39)-(2.40) s'écrit :

$$\int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \vec{\varphi}_{ij}^t \partial_t \vec{v}_i = - \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}(\vec{\sigma}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \left( \vec{F}(\vec{\sigma}_i) + \vec{F}(\vec{\sigma}_k) \right) \vec{n}_{ik} \quad (2.43)$$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \Lambda_{0_i} \partial_t \vec{\sigma}_i = - \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} \vec{\psi}_{ij} : \vec{G}(\vec{v}_i) + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\psi}_{ij}^t \left( \vec{G}(\vec{v}_i) + \vec{G}(\vec{v}_k) \right) \vec{n}_{ik}. \quad (2.44)$$

En remplaçant  $\vec{v}_i$  et  $\vec{\sigma}_i$  par leurs expressions respectives données par (2.31) et (2.32), nous obtenons le système :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d_i} \rho_i \partial_t v_{ik} \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{\varphi}_{ik} &= - \sum_{k=1}^{d_i} \sigma_{ik} \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} \vec{\varphi}_{ij} : \vec{F}(\vec{\psi}_{ik}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[ \sum_{r=1}^{d_i} \sigma_{ir} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}(\vec{\psi}_{ir}) \vec{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_i} \sigma_{ks} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{F}(\vec{\psi}_{ks}) \vec{n}_{ik} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d_i} \partial_t \sigma_{ik} \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \Lambda_{0_i} \vec{\psi}_{ik} &= - \sum_{k=1}^{d_i} v_{ik} \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} \vec{\psi}_{ij} : \vec{G}(\vec{\varphi}_{ik}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[ \sum_{r=1}^{d_i} v_{ir} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\psi}_{ij}^t \vec{G}(\vec{\varphi}_{ir}) \vec{n}_{ik} + \sum_{s=1}^{d_i} v_{ks} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\psi}_{ij}^t \vec{G}(\vec{\varphi}_{ks}) \vec{n}_{ik} \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Le système (2.45)-(2.46) peut être écrit sous une forme matricielle plus explicite. En effet, il est facile de vérifier les égalités suivantes :

$$\vec{\nabla} \vec{\varphi} : \vec{F}(\vec{\psi}) = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} (\partial_\alpha \vec{\varphi})^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\psi} \quad (2.47)$$

et

$$\vec{\nabla} \vec{\psi} : \vec{G}(\vec{\varphi}) = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left( \partial_\alpha \vec{\psi} \right)^t \mathbb{N}_\alpha \vec{\varphi}, \quad (2.48)$$

pour tous  $\vec{\varphi} \in \mathcal{P}_i$  et  $\vec{\psi} \in \mathcal{Q}_i$ . De plus, en posant

$$\mathbb{P}_{ik} = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \tilde{n}_{ik\alpha} \mathbb{M}_\alpha \quad (2.49)$$

et

$$\mathbb{Q}_{ik} = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \tilde{n}_{ik\alpha} \mathbb{N}_\alpha \quad (2.50)$$

nous avons les égalités,

$$\vec{\varphi}^t \vec{F}(\vec{\psi}) \vec{n}_{ik} = \vec{\varphi}^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\psi} \quad (2.51)$$

et

$$\vec{\psi}^t \vec{G}(\vec{\varphi}) \vec{n}_{ik} = \vec{\psi}^t \mathbb{Q}_{ik} \vec{\varphi}. \quad (2.52)$$

**Remarque 2.4.1** *Étant donné que  $\mathbb{N}_\alpha = \mathbb{M}_\alpha^t$  pour tout  $\alpha \in \{x,y,z\}$ , et que  $\vec{n}_{ki} = -\vec{n}_{ik}$  pour toute cellule  $k \in V(i)$ , les matrices  $\mathbb{P}_{ik}$  et  $\mathbb{Q}_{ik}$  vérifient les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{ik} &= \mathbb{P}_{ik}^t \\ \mathbb{P}_{ki} &= -\mathbb{P}_{ik} \\ \mathbb{Q}_{ki} &= -\mathbb{Q}_{ik}. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\tilde{\mathbb{K}}_i^1$  et  $\tilde{\mathbb{K}}_i^2$  désignent les matrices de masse locales d'une cellule  $\mathcal{T}_i$  définies par

$$\left( \tilde{\mathbb{K}}_i^1 \right)_{jk} = \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{\varphi}_{ik} \quad 1 \leq j, k \leq d_i \quad (2.53)$$

et

$$\left( \tilde{\mathbb{K}}_i^2 \right)_{jk} = \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \Lambda_{0i} \vec{\psi}_{ik} \quad 1 \leq j, k \leq d_i \quad (2.54)$$

et si nous notons  $\mathbf{v}_i$  et  $\boldsymbol{\sigma}_i$  les vecteurs-colonnes  $(v_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$  et  $(\sigma_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$  respectivement, le système (2.45)-(2.46) se réécrit en utilisant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned} \rho_i \left( \tilde{\mathbb{K}}_i^1 \partial_t \mathbf{v}_i \right)_j &= - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_{k=1}^{d_i} \sigma_{ik} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi}_{ij})^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\psi}_{ik} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[ \sum_{r=1}^{d_i} \sigma_{ir} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\psi}_{ir} + \sum_{s=1}^{d_i} \sigma_{ks} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\psi}_{ks} \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\mathbb{K}}_i^2 \partial_t \boldsymbol{\sigma}_i \right)_j &= - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_{k=1}^{d_i} v_{ik} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\psi}_{ij})^t \mathbb{N}_\alpha \vec{\varphi}_{ik} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \left[ \sum_{r=1}^{d_i} v_{ir} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\psi}_{ij}^t \mathbb{Q}_{ik} \vec{\varphi}_{ir} + \sum_{s=1}^{d_i} v_{ks} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\psi}_{ij}^t \mathbb{Q}_{ik} \vec{\varphi}_{ks} \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Finalement, si  $\vec{v}_i$  et  $\vec{\sigma}_i$  désignent les vecteurs vitesse et contrainte dans la cellule  $\mathcal{T}_i$ , définis respectivement par

$$\vec{v}_i = (\mathbf{v}_{x_i}, \mathbf{v}_{y_i}, \mathbf{v}_{z_i})^t \quad (2.57)$$

et

$$\vec{\sigma}_i = (\omega_i, \omega'_i, \omega''_i, \sigma_{xy_i}, \sigma_{xz_i}, \sigma_{yz_i})^t, \quad (2.58)$$

et si nous faisons l'hypothèse d'utiliser une même famille de fonctions de base scalaires  $\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i$  pour chaque composante du champ de vecteurs  $\vec{v}_i$  et une même famille de fonctions de base scalaires  $\psi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i$  pour chaque composante du champ de vecteurs  $\vec{\sigma}_i$ , alors le système (2.55)-(2.56) peut s'écrire sous une forme plus compacte :

$$\begin{aligned} \rho_i (\mathbb{I}_3 \otimes \mathbb{K}_i^1) \partial_t \vec{v}_i = & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{M}_\alpha \otimes \mathbb{E}_\alpha^1) \vec{\sigma}_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} [(\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik}^1) \vec{\sigma}_i + (\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik}^1) \vec{\sigma}_k] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_{0_i} \otimes \mathbb{K}_i^2) \partial_t \vec{\sigma}_i = & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{N}_\alpha \otimes \mathbb{E}_\alpha^2) \vec{v}_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} [(\mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik}^2) \vec{v}_i + (\mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik}^2) \vec{v}_k], \end{aligned} \quad (2.60)$$

où  $\mathbb{K}_i^1$  et  $\mathbb{K}_i^2$  sont les matrices données par

$$(\mathbb{K}_i^1)_{jk} = \int_{\mathcal{T}_i} \varphi_{ij} \varphi_{ik} \quad 1 \leq j, k \leq d_i \quad (2.61)$$

et

$$(\mathbb{K}_i^2)_{jk} = \int_{\mathcal{T}_i} \psi_{ij} \psi_{ik} \quad 1 \leq j, k \leq d_i, \quad (2.62)$$

$\mathbb{E}_\alpha^1$  et  $\mathbb{E}_\alpha^2$  sont des matrices associées à des intégrales volumiques, données par

$$(\mathbb{E}_\alpha^1)_{jk} = \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \varphi_{ij}) \varphi_{ik} \quad 1 \leq j, k \leq d_i \quad (2.63)$$

et

$$(\mathbb{E}_\alpha^2)_{jk} = \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \psi_{ij}) \varphi_{ik} \quad 1 \leq j, k \leq d_i \quad (2.64)$$

et  $\mathbb{F}_{ik}^1, \mathbb{G}_{ik}^1, \mathbb{F}_{ik}^2$  et  $\mathbb{G}_{ik}^2$  sont des matrices associées à des intégrales surfaciques, données par

$$(\mathbb{F}_{ik}^1)_{jr} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \varphi_{ij} \psi_{ir} \quad 1 \leq j, r \leq d_i \quad (2.65)$$

$$(\mathbb{F}_{ik}^2)_{jr} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \psi_{ij} \varphi_{ir} \quad 1 \leq j, r \leq d_i \quad (2.66)$$

$$(\mathbb{G}_{ik}^1)_{js} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \varphi_{ij} \psi_{ks} \quad 1 \leq j \leq d_i, 1 \leq s \leq d_k \quad (2.67)$$

$$(\mathbb{G}_{ik}^2)_{js} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \psi_{ij} \varphi_{ks} \quad 1 \leq j \leq d_i, 1 \leq s \leq d_k. \quad (2.68)$$

Le produit tensoriel  $\otimes$  étant le produit tensoriel matriciel, défini pour toutes matrices  $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  par

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbb{B} & \dots & a_{1m}\mathbb{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\mathbb{B} & \dots & a_{nm}\mathbb{B} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{np,mq}(\mathbb{R}). \quad (2.69)$$

**Remarque 2.4.2** Si les familles de fonctions de base  $\varphi_{ij}$  et  $\psi_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$  sont telles que  $\varphi_{ij} = \psi_{ij}$  pour toute cellule  $\mathcal{T}_i$ , alors nous avons les égalités :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_i^1 &= \mathbb{K}_i^2 \\ \mathbb{E}_\alpha^1 &= \mathbb{E}_\alpha^2 \quad \forall \alpha \in \{x, y, z\} \\ \mathbb{F}_{ik}^1 &= \mathbb{F}_{ik}^2 \quad \forall k \in V(i) \\ \mathbb{G}_{ik}^1 &= \mathbb{G}_{ik}^2 \quad \forall k \in V(i). \end{aligned}$$

Dans la suite, nous nous placerons dans les hypothèses de la remarque 2.4.2. Nous omettrons les exposants sur les matrices pour plus de clarté. Le système (2.59)-(2.60) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho_i (\mathbb{I}_3 \otimes \mathbb{K}_i) \partial_t \vec{v}_i &= - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{M}_\alpha \otimes \mathbb{E}_\alpha) \vec{\sigma}_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} [(\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i + (\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k] \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_{0_i} \otimes \mathbb{K}_i) \partial_t \vec{\sigma}_i &= - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{N}_\alpha \otimes \mathbb{E}_\alpha) \vec{v}_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} [(\mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik}) \vec{v}_i + (\mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik}) \vec{v}_k]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

## 2.5 Discrétisation temporelle

Pour la discrétisation temporelle, nous choisissons un schéma de type saute-mouton, qui est bien adapté à la structure croisée ou découplée du système. Le système (2.70)-(2.71)

s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho_i (\mathbb{I}_3 \otimes \mathbb{K}_i) \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{M}_\alpha \otimes \mathbb{E}_\alpha) \vec{\sigma}_i^n \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} [(\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^n + (\mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^n] \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_{0_i} \otimes \mathbb{K}_i) \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} = & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} (\mathbb{N}_\alpha \otimes \mathbb{E}_\alpha) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} [(\mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Le schéma en temps est explicite. Ainsi, chaque pas de temps ne requiert que l'inversion de la matrice de masse locale  $\mathbb{K}_i \in \mathbb{M}_{d_i}(\mathbb{R})$  où  $d_i$  est le nombre de degrés de liberté des champs dans chaque cellule. Rappelons aussi que, si nous faisons le choix des mêmes fonctions de base sur toutes les cellules et que ces fonctions de base sont des polynômes d'ordre  $k$  (on parle alors de méthode GD- $\mathbb{P}_k$ ), alors la matrice  $\mathbb{K}_i$  est unique et  $d_i$  est donné par la relation

$$d_i = \binom{n+k}{n} \quad (2.74)$$

où  $n$  est la dimension de l'espace.

Finalement, nous ne démontrons pas de résultats particuliers concernant la convergence de ce schéma. Nous rappelons simplement que le schéma (2.72)-(2.73) est d'ordre  $k$  en espace et deux en temps. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux de Fezoui et al. [72] pour une démonstration complète sur la convergence de ce schéma dans le cadre des équations de Maxwell, ou encore aux travaux de Hesthaven [85, 86] pour une étude plus générale sur la convergence des méthodes GD pour les systèmes hyperboliques.

## 2.6 Cas particulier : la méthode volumes finis

Elle consiste à approcher les différentes composantes des champs de vecteurs étudiés par des fonctions constantes en espace par cellule. Ainsi le nombre de degré de liberté par composante d'un champ donné et par cellule est égale à un (c'est-à-dire  $\varphi_i = \psi_i = 1$ ). Un calcul rapide donne les égalités :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_i &= V_i \\ \mathbb{E}_\alpha &= 0 \quad \forall \alpha \in \{x, y, z\} \\ \mathbb{F}_{ik} &= \mathbb{G}_{ik} = S_{ik} \quad \forall k \in V(i), \end{aligned}$$

où  $V_i$  est le volume de la cellule  $\mathcal{T}_i$  et  $S_{ik}$  est la surface de l'interface  $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$ .

Le système (2.72)-(2.73) s'écrit simplement :

$$\rho_i V_i \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \quad (2.75)$$

$$\Lambda_{0i} V_i \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} = \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{Q}_{ik} \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2}. \quad (2.76)$$

Ce schéma a été étudié en détail dans [23]. Nous pouvons rappeler les résultats principaux suivants :

- Dans un domaine infini homogène partitionné de manière structuré, la condition de stabilité est assurée par une condition de type CFL

$$v_p \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq 1 \quad (2.77)$$

où  $v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  est la vitesse de l'onde de pression P.

- La méthode des équations équivalentes permet de montrer que ce schéma est d'ordre deux en espace et en temps sur un maillage structuré. De plus le schéma est non diffusif, et faiblement dispersif en deux dimensions d'espace lorsque le pas de temps est proche de la valeur maximale autorisée par la condition CFL [134].
- Dans le cas d'un maillage non structuré, le schéma est stable en norme  $L^2$  si pour toutes cellules adjacentes  $\mathcal{T}_i$  et  $\mathcal{T}_k$  la condition suivante est vérifiée :

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{v_p^2 - v_s^2} \|\mathbb{P}_{ik}\|} \sqrt{\frac{V_i V_k}{S_i S_k}}, \quad (2.78)$$

où  $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  est la vitesse de l'onde de cisaillement S et  $S_i = \sum_{k \in V(i)} S_{ik}$  est la superficie de la cellule  $\mathcal{T}_i$ .

## 2.7 Définition et étude d'énergie

Dans la section précédente, nous avons écrit le schéma GD avec des approximations centrées en espace et saute-mouton en temps, pour les équations de l'élastodynamique. Dans cette section, nous allons montrer que ce schéma est stable sous une condition de type CFL. Cette étude sera basée sur la définition d'une énergie (c'est-à-dire une forme quadratique définie positive) qui est conservée par le schéma. En effet, il est difficile d'obtenir des résultats théoriques de stabilité lorsque le domaine est partitionné de manière non uniforme. Une façon de faire consiste à travailler avec des considérations énergétiques et de prouver la conservation ou la décroissance d'une énergie, ce qui assure la stabilité en norme  $L^2$  du schéma puisque les différentes variables du système restent bornées.

## 2.7 Définition et étude d'énergie

Considérons donc pour commencer l'énergie discrète définie dans le domaine  $\Omega$  par

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_i \left[ \int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\sigma}_i^n \Lambda_{0_i} \vec{\sigma}_i^n \right]. \quad (2.79)$$

Cette expression découle directement de l'énergie continue du système donnée par

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \|\vec{v}\|^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\epsilon}}_{E_m}, \quad (2.80)$$

où  $E_c$  désigne l'énergie cinétique,  $E_m$  désigne l'énergie mécanique et  $\underline{\epsilon}$  est le tenseur des déformations du système<sup>2</sup>.

Avant de montrer que  $E^n$  est une forme quadratique définie positive (et donc de l'identifier à une fonction de Lyapunov), nous allons dans un premier temps montrer qu'elle se conserve si le domaine  $\Omega$  est infini. Rappelons pour ceci le schéma (2.43)-(2.44) qui s'écrit de manière équivalente :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \vec{\varphi}_{ij}^t \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_{\alpha} \vec{\varphi}_{ij})^t \mathbb{M}_{\alpha} \vec{\sigma}_i^n \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \mathbb{P}_{ik} (\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n) \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\psi}_{ij}^t \Lambda_{0_i} \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} &= - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_{\alpha} \vec{\psi}_{ij})^t \mathbb{N}_{\alpha} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\psi}_{ij}^t \mathbb{Q}_{ik} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.82)$$

**Lemme 2.7.1** *En considérant le système (2.81)-(2.82), l'énergie discrète (2.79) est conservée à chaque pas de temps, c'est à dire*

$$E^{n+1} = E^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.83)$$

**Preuve 2.7.1** *La variation de l'énergie discrète entre deux pas temps consécutifs est donnée par*

$$\begin{aligned} \Delta E &= E^{n+1} - E^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \left[ \int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \vec{v}_i^{n+\frac{3}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right) + \int_{\mathcal{T}_i} (\vec{\sigma}_i^{n+1} + \vec{\sigma}_i^n)^t \Lambda_{0_i} (\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n) \right], \end{aligned} \quad (2.84)$$

---

2.  $\underline{\epsilon} = (\epsilon_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  avec  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

où le deuxième terme de la quantité à droite a été obtenu grâce au caractère symétrique de la matrice  $\Lambda_{0_i}$ . Étant donné que  $(\vec{\varphi}_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$  est une famille génératrice de  $\vec{v}_i$  et  $(\vec{\psi}_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$  est une famille génératrice de  $\vec{\sigma}_i$ , nous obtenons en remplaçant  $\vec{\varphi}_{ij}$  par  $\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}}$  dans l'équation (2.81) et  $\vec{\psi}_{ij}$  par  $\vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} := \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} + \vec{\sigma}_i^n}{2}$  dans l'équation (2.82) et en substituant dans l'équation (2.84),

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \sum_i & \left[ - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{T_i} \left( \partial_\alpha \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{T_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} \right) \\ & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{T_i} \left( \partial_\alpha \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{N}_\alpha \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \int_{T_{ik}} \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{Q}_{ik} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Nous avons aussi  $\mathbb{N}_\alpha = \mathbb{M}_\alpha^t$  pour tout  $\alpha \in \{x,y,z\}$ . Il est facile, par le théorème de Green, de vérifier les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{T_i} \left( \partial_\alpha \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \int_{T_i} \left( \partial_\alpha \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{N}_\alpha \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \\ = \int_{\partial T_i} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{M}_\alpha \tilde{n}_\alpha \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$= \sum_{k \in V(i)} \int_{T_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{M}_\alpha \tilde{n}_{ik_\alpha} \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t. \quad (2.87)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{T_i} \left( \partial_\alpha \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \int_{T_i} \left( \partial_\alpha \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{N}_\alpha \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \\ = \sum_{k \in V(i)} \int_{T_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t. \end{aligned} \quad (2.88)$$



La variation de l'énergie discrète se réduit donc à

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \in V(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left[ \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{Q}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{internes}}^{\text{interfaces}} \left[ \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{Q}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{T}_{ki}} \left( \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ki} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{Q}_{ki} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\text{spéciales}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{Q}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

ou le terme “interfaces spéciales” désigne toute surface n'appartenant qu'à une seule cellule (comme les interfaces du bord physique du domaine par exemple), alors qu'une interface interne est partagée par deux cellules. Nous reviendrons aussi sur cette définition un peu plus loin lors de la définition de la surface de la faille.

Par la remarque (2.4.1) nous pouvons conclure que la somme portant sur les interfaces internes est nulle. Ainsi, la variation de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{spéciales}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \\ &= \sum_{\text{spéciales}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left[ \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} }{2} + \left( \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right. \\ &\quad \left. - \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right]. \end{aligned}$$

Enfin, si nous notons  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  les fonctions flux donnés par

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{Q}_{ik} \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2}, \quad (2.89)$$

alors la variation de  $E$  s'écrit :

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \sum_{\text{spéciales}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \mathcal{F}_{ik}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right) + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (2.90)$$

Ce calcul montre que la variation de l'énergie totale discrète du système s'écrit uniquement en fonction des flux à travers les interfaces spéciales au domaine. Ainsi, en l'absence d'interface spéciale (ce qui est le cas pour un domaine infini), la variation de l'énergie est nulle et l'énergie discrète du système est parfaitement conservée.

Reste maintenant à montrer que  $E^n$  est une forme quadratique définie positive de toutes les inconnues numériques du système. Nous proposons le théorème suivant :

**Théorème 2.7.1** *Le schéma (2.81)-(2.82), est stable (au sens où toutes les inconnues numériques restent bornées) sous la condition de type CFL suivante sur la pas de temps  $\Delta t$  :*

$$\Delta t < \frac{4}{\pi} \min \left[ \frac{\sqrt{\rho_i}}{S_i} \left( \frac{2a_i + b_{ik}}{V_i \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} + \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} \right)^{-1}, \right. \\ \frac{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}}{S_i} \left( \frac{2a_i + b_{ik}}{V_i \sqrt{\rho_i}} + \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} \frac{1}{\sqrt{\rho_k}} \right)^{-1}, \\ \frac{\sqrt{\rho_k}}{S_k} \left( \frac{2a_k + b_{ki}}{V_k \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} + \sqrt{\frac{b_{ki} b_{ik}}{V_k V_i}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} \right)^{-1}, \\ \left. \frac{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}}{S_k} \left( \frac{2a_k + b_{ki}}{V_k \sqrt{\rho_k}} + \sqrt{\frac{b_{ki} b_{ik}}{V_k V_i}} \frac{1}{\sqrt{\rho_i}} \right)^{-1} \right], \quad (2.91)$$

avec  $\pi = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \|\mathbb{M}_\alpha\|$ .

**Preuve 2.7.2** *Le champ de vecteurs  $\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}}$  est donné par l'équation (2.81) et dépend linéairement de  $\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}$  et des flux  $\mathcal{F}_{ik}^n$ . Ces derniers dépendent linéairement de  $\vec{\sigma}_i^n$ . Ainsi,  $E^n$  est une forme quadratique des variables  $\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}$  et  $\vec{\sigma}_i^n$ . D'autre part, en remplaçant  $\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}}$  par son expression donnée par (2.81), l'équation (2.79) s'écrit :*

$$2 E^n = \sum_i \left[ \int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \|\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2 - \Delta t \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} \left( \partial_\alpha \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i^n \right. \\ \left. + \Delta t \sum_{k \in V(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathcal{F}_{ik}^n + \int_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i^n\|_{\Lambda_{0_i}}^2 \right].^3 \quad (2.92)$$

Pour alléger les écritures, nous omettons ici les exposants temporels (tous les vecteurs contraintes sont exprimés à l'instant  $n$ , alors que les vecteurs vitesses sont exprimés à l'instant  $n + \frac{1}{2}$ ). Nous noterons  $\|\vec{x}\|_{\mathcal{T}_i}$  la norme  $L^2$  du vecteur  $\vec{x}$  sur la cellule  $\mathcal{T}_i$ , c'est-à-dire

$$\|\vec{x}\|_{\mathcal{T}_i}^2 = \int_{\mathcal{T}_i} \|\vec{x}\|^2 \quad \forall \vec{x} \in \text{vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i) \cup \text{vect}(\vec{\psi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i). \quad (2.93)$$

---

3.  $\|\cdot\|_{\Lambda_0}$  est bien une norme matricielle définie par  $\|\vec{x}\|_{\Lambda_0} = \sqrt{\vec{x}^t \Lambda_0 \vec{x}}$ , puisque  $\Lambda_0$  est symétrique définie positive.

Si  $\mathbf{r}^+(\mathbb{M})$  et  $\mathbf{r}^-(\mathbb{M})$  désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre d'une matrice donnée  $\mathbb{M}$ , alors nous obtenons en utilisant les notations de la section 2.4

$$\begin{aligned} 2 E^n &\geq \sum_i \sum_{k \in V(i)} \left[ \frac{S_{ik}}{S_i} \left( \rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \Delta t \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{v}_i)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta t \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{v}_i^t \mathcal{F}_{ik} \right] \\ &\geq \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{internes}}} E_{ik}^n, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E_{ik}^n &= \frac{S_{ik}}{S_i} \left( \rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \Delta t \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{v}_i)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i \right) \\ &\quad + \frac{S_{ki}}{S_k} \left( \rho_k \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k}) \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 - \Delta t \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_k} (\partial_\alpha \vec{v}_k)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_k \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \int_{\mathcal{T}_{ik}} (\vec{v}_i - \vec{v}_k)^t \mathbb{P}_{ik} (\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Nous cherchons à minorer la quantité  $E_{ik}^n$ . Pour ce faire, nous allons supposer une certaine régularité sur les fonctions de base  $\vec{\varphi}_{ij}$  et  $\vec{\psi}_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ . Plus précisément, nous faisons les hypothèses suivantes :

**Définition 2.7.1** Pour toute cellule  $\mathcal{T}_i$ , il existe des constantes réelles adimensionnées  $a_i$  et  $b_{ik}$  vérifiant :

- $\forall \vec{x} \in \text{vect}(\vec{\varphi}_{ij}) \cup \text{vect}(\vec{\psi}_{ij}), 1 \leq j \leq d_i$  et  $\forall \alpha \in \{x,y,z\}$ ,

$$\|\partial_\alpha \vec{x}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \leq \frac{a_i S_i}{V_i} \|\vec{x}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \quad (2.95)$$

- $\forall \vec{x} \in \text{vect}(\vec{\varphi}_{ij}) \cup \text{vect}(\vec{\psi}_{ij}), 1 \leq j \leq d_i$  et  $\forall k \in V(i)$ ,

$$\|\vec{x}\|_{\mathcal{T}_{ik}}^2 \leq \frac{b_{ik} S_{ik}}{V_i} \|\vec{x}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \quad (2.96)$$

En notant

$$\pi = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \|\mathbb{M}_\alpha\|, \quad (2.97)$$

nous avons

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathcal{T}_{ik}} (\vec{v}_i - \vec{v}_k)^t \mathbb{P}_{ik} (\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k) \right| &\leq \|\mathbb{P}_{ik}\| \int_{\mathcal{T}_{ik}} \|\vec{v}_i - \vec{v}_k\| \|\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k\| \\
 &\leq \pi \|\vec{v}_i - \vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_{ik}} \|\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_{ik}} \\
 &\leq \pi (\|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_{ik}} + \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_{ik}}) (\|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_{ik}} + \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_{ik}}) \\
 &\leq \pi \left[ \frac{b_{ik} S_{ik}}{V_i} \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i} + \frac{b_{ki} S_{ki}}{V_k} \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k} \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} S_{ik} (\|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k} + \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}) \right].
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 E_{ik}^n &\geq \frac{S_{ik}}{S_i} \left( \rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \frac{\pi a_i S_i \Delta t}{V_i} \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i} \right) \\
 &\quad + \frac{S_{ki}}{S_k} \left( \rho_k \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k}) \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 - \frac{\pi a_k S_k \Delta t}{V_k} \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k} \right) \\
 &\quad - \frac{\pi S_{ik} \Delta t}{2} \left( \frac{b_{ik}}{V_i} \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i} + \frac{b_{ki}}{V_k} \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k} \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} (\|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k} + \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}) \right).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{E_{ik}^n}{S_{ik}} &\geq \frac{\rho_i}{S_i} \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}{S_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \frac{\pi \Delta t}{V_i} \left( a_i + \frac{b_{ik}}{2} \right) \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i} \\
 &\quad + \frac{\rho_k}{S_k} \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 + \frac{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}{S_k} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 - \frac{\pi \Delta t}{V_k} \left( a_k + \frac{b_{ki}}{2} \right) \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k} \\
 &\quad - \frac{\pi \Delta t}{2} \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} (\|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k} + \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}).
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{\alpha a^2 + \beta b^2}{2\sqrt{\alpha\beta}}$  avec  $\alpha = \rho_l$ ,  $a = \|\vec{v}_l\|_{\mathcal{T}_l}$ ,  $\beta = \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_s})$ ,

---

4. La norme d'une matrice  $\mathbb{M}$  peut être définie comme  $\|\mathbb{M}\| = \sqrt{\mathbf{r}(\mathbb{M}\mathbb{M}^t)}$ , où  $\mathbf{r}$  est le rayon spectral (c'est-à-dire la plus grande valeur propre en valeur absolue) de la matrice. En 2D, nous avons  $\|\mathbb{M}_x\| = \|\mathbb{M}_y\| = 2$  donc  $\pi = 4$ . En 3D,  $\|\mathbb{M}_x\| = \|\mathbb{M}_y\| = 2$  et  $\|\mathbb{M}_z\| = 3$ , donc  $\pi = 7$ .

## 2.7 Définition et étude d'énergie

$b = \|\vec{\sigma}_s\|_{\mathcal{T}_s}$  et des indices  $l$  et  $s \in \{i, k\}$  bien choisis, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{E_{ik}^n}{S_{ik}} &\geq \frac{\rho_i}{S_i} \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}{S_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \frac{\pi \Delta t (2a_i + b_{ik})}{4 V_i \sqrt{\rho_i} \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} (\rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2) \\
&\quad + \frac{\rho_k}{S_k} \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 + \frac{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}{S_k} \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 - \frac{\pi \Delta t (2a_k + b_{ki})}{4 V_k \sqrt{\rho_k} \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} (\rho_k \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k}) \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2) \\
&\quad - \frac{\pi \Delta t}{4} \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} \left( \frac{\rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k}) \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2}{\sqrt{\rho_i} \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} + \frac{\rho_k \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2}{\sqrt{\rho_k} \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} \right) \\
&\geq \rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 \left[ \frac{1}{S_i} - \frac{\pi \Delta t}{4 \sqrt{\rho_i}} \left( \frac{2a_i + b_{ik}}{V_i \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} + \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} \right) \right] \\
&\quad + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 \left[ \frac{1}{S_i} - \frac{\pi \Delta t}{4 \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} \left( \frac{2a_i + b_{ik}}{V_i \sqrt{\rho_i}} + \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} \frac{1}{\sqrt{\rho_k}} \right) \right] \\
&\quad + \rho_k \|\vec{v}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 \left[ \frac{1}{S_k} - \frac{\pi \Delta t}{4 \sqrt{\rho_k}} \left( \frac{2a_k + b_{ki}}{V_k \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} + \sqrt{\frac{b_{ki} b_{ik}}{V_k V_i}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} \right) \right] \\
&\quad + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k}) \|\vec{\sigma}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 \left[ \frac{1}{S_k} - \frac{\pi \Delta t}{4 \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} \left( \frac{2a_k + b_{ki}}{V_k \sqrt{\rho_k}} + \sqrt{\frac{b_{ki} b_{ik}}{V_k V_i}} \frac{1}{\sqrt{\rho_i}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que la quantité  $E_{ik}^n$  soit définie positive est que toutes les quantités entre crochets soient positives, c'est-à-dire, pour tout  $i$  et pour tout  $k \in V(i)$

$$\begin{aligned}
\Delta t &< \frac{4}{\pi} \min \left[ \frac{\sqrt{\rho_i}}{S_i} \left( \frac{2a_i + b_{ik}}{V_i \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} + \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} \right)^{-1}, \right. \\
&\quad \frac{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}}{S_i} \left( \frac{2a_i + b_{ik}}{V_i \sqrt{\rho_i}} + \sqrt{\frac{b_{ik} b_{ki}}{V_i V_k}} \frac{1}{\sqrt{\rho_k}} \right)^{-1}, \\
&\quad \frac{\sqrt{\rho_k}}{S_k} \left( \frac{2a_k + b_{ki}}{V_k \sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}} + \sqrt{\frac{b_{ki} b_{ik}}{V_k V_i}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} \right)^{-1}, \\
&\quad \left. \frac{\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_k})}}{S_k} \left( \frac{2a_k + b_{ki}}{V_k \sqrt{\rho_k}} + \sqrt{\frac{b_{ki} b_{ik}}{V_k V_i}} \frac{1}{\sqrt{\rho_i}} \right)^{-1} \right]. \tag{2.98}
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement la condition (2.91) qu'il fallait démontrer.

**Remarque 2.7.1** La condition (2.91) a bien la forme d'une condition de type CFL (Courant-Friedrichs-Levy), puisque qu'elle est de la forme

$$\Delta t < C^{ste} \min_i \left( \frac{V_i}{S_i} \sqrt{\rho_i \mathbf{r}^-(\Lambda_0)} \right) = C^{ste} \min_i \left( \frac{h_i}{v_{p_i}} \right).$$

**Remarque 2.7.2** Dans le cas où le milieu est homogène, l'expression (2.91) s'écrit plus simplement sous la forme

$$\Delta t < \frac{4\sqrt{\rho}\sqrt{\mathbf{r}^-(\Lambda_0)}}{\pi} \min \left[ \frac{1}{S_i} \left( \frac{2a_i + b_{ik}}{V_i} + \sqrt{\frac{b_{ik}b_{ki}}{V_i V_k}} \right)^{-1}, \right. \\ \left. \frac{1}{S_k} \left( \frac{2a_k + b_{ki}}{V_k} + \sqrt{\frac{b_{ki}b_{ik}}{V_k V_i}} \right)^{-1} \right]. \quad (2.99)$$

Or

$$\mathbf{r}^-(\Lambda_0) = \frac{n}{n\lambda + 2\mu}$$

où  $n$  est la dimension de l'espace. Ainsi

$$\rho \mathbf{r}^-(\Lambda_0) = \frac{1}{\frac{\lambda + \frac{n}{2}\mu}{\rho}} = \frac{1}{v_p^2 - 2\frac{n-1}{n}v_s^2}$$

et l'équation (2.99) se réécrit :

$$\Delta t < \frac{4}{\pi \sqrt{v_p^2 - 2\frac{n-1}{n}v_s^2}} \min \left[ \frac{1}{S_i} \left( \frac{2a_i + b_{ik}}{V_i} + \sqrt{\frac{b_{ik}b_{ki}}{V_i V_k}} \right)^{-1}, \right. \\ \left. \frac{1}{S_k} \left( \frac{2a_k + b_{ki}}{V_k} + \sqrt{\frac{b_{ki}b_{ik}}{V_k V_i}} \right)^{-1} \right]. \quad (2.100)$$

**Remarque 2.7.3** Dans le cas des volumes finis, nous avons  $a_i = 0$  et  $b_{ik} = 1$  pour tout  $i$  et tout  $k \in V(i)$ . Nous retrouvons ainsi un résultat analogue à celui donné en (2.78).

## Conclusion

Cette section a été dédiée à la présentation d'un schéma de type GD avec des flux centrés en espace et un schéma saute-mouton en temps pour les équations de l'élastodynamique. Nous avons montré que, pour un pas de temps inférieur à une valeur donnée, le schéma conserve une énergie discrète lorsque le domaine est infini. Ce caractère de conservation d'énergie sera notre point de départ pour déterminer les conditions aux limites sur une faille située à l'intérieur du domaine. Cette dernière étant une surface de discontinuité, nous avons cherché à définir les fonctions de flux  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  adéquates afin de maintenir une variation d'énergie nulle dans le domaine d'une part, et de satisfaire les conditions aux limites (1.11) sur la faille d'autre part. Ce dernier point va être maintenant abordé.



# Chapitre 3

## Conditions aux limites

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>3.1 Conditions aux limites sur la faille</b> . . . . .	<b>51</b>
3.1.1 Cas des volumes finis . . . . .	56
3.1.2 Cas général . . . . .	58
<b>3.2 Conditions aux limites absorbantes</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>66</b>

---

### Introduction

Les conditions aux limites sont la pierre angulaire de ce travail. Dans le premier chapitre, nous avons défini le modèle physique que nous traitons en introduisant les modes de fracturation et en particulier le mode cisailant, ainsi que les lois de frottement qui régissent l'évolution de la faille lors de la rupture dynamique. Dans le deuxième chapitre, nous avons explicité le schéma GD avec des flux centrés en espace et un schéma saute mouton en temps pour la résolution des équations de l'élastodynamique. Dans le présent chapitre, nous allons expliciter les flux numériques que nous devons considérer sur la faille pour bien prendre en compte les conditions aux limites (1.11) dans notre schéma numérique. Nous expliciterons également les conditions aux limites dites absorbantes que nous considérons sur le bord extérieur du domaine numérique afin de simuler un domaine infini. Pour ce faire, nous nous baserons sur l'étude d'énergie faite dans la section précédente.

### 3.1 Conditions aux limites sur la faille

Par souci de simplicité, nous supposerons tout au long de ce paragraphe que le domaine numérique est infini. Ainsi, les seules conditions aux limites que nous traitons seront celles



appliquées sur la surface de la faille.

Nous avons vu (équation 2.89) que les flux à travers une interface quelconque du domaine sont donnés par la moyenne des valeurs des champs situés de part et d'autre de cette interface. Ce raisonnement n'est plus valable lorsque cette dernière coïncide avec la surface de la faille. En effet, les champs - ou plus précisément quelques composantes de ces champs - pouvant subir des discontinuités à travers la surface de la faille, il n'est plus concevable de considérer que les flux à travers la surface de la faille résultent d'une égale contribution des champs de chaque côté de l'interface en question. Afin de tenir compte de ces discontinuités, nous allons modifier l'écriture des flux à travers la surface de la faille, qui désormais sera assimilée à une surface spéciale, comme suit :

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} (\mathbb{A}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \mathbb{B}_{ik} \vec{\sigma}_k^n) \quad (3.1)$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{D}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}), \quad (3.2)$$

où  $\mathbb{A}_{ik}$ ,  $\mathbb{B}_{ik}$ ,  $\mathbb{C}_{ik}$  et  $\mathbb{D}_{ik}$  sont des matrices à déterminer.

**Remarque 3.1.1** *Pour des raisons de symétrie, les matrices  $\mathbb{A}_{ik}$ ,  $\mathbb{B}_{ik}$ ,  $\mathbb{C}_{ik}$  et  $\mathbb{D}_{ik}$  vérifient les relations suivantes :  $\mathbb{A}_{ki} = -\mathbb{A}_{ik}$ ,  $\mathbb{B}_{ki} = -\mathbb{B}_{ik}$ ,  $\mathbb{C}_{ki} = -\mathbb{C}_{ik}$  et  $\mathbb{D}_{ki} = -\mathbb{D}_{ik}$ . Le signe négatif provient du fait que le vecteur normal à l'interface  $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$  vérifie la relation  $\vec{n}_{ki} = -\vec{n}_{ik}$ .<sup>1</sup>*

Les équations (3.1) et (3.2) illustrent bien que les flux à travers la surface de la faille sont donnés par des contributions différentes des champs de chaque coté de l'interface. Reste maintenant à calculer les matrices mises en jeu. Pour ce faire, reprenons l'expression de la variation d'énergie (2.90) et remplaçons les expressions des flux par leurs valeurs

---

1. Nous attirons l'attention ici sur le fait que les matrices ne sont pas nécessairement antisymétriques. Les indices utilisés font simplement référence à l'interface  $\mathcal{T}_{ik}$  et non pas au terme  $ik$  de la matrice.

respectives. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta E}{\Delta t} &= \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{sur la faille}}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \mathcal{F}_{ik}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right) + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k / \\ \mathcal{T}_{ik} \subset \Sigma}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left[ \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( -\mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \mathbb{A}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \mathbb{B}_{ik} \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} \right) \right. \\
&\quad + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \left( \mathbb{Q}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{C}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{D}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + \left( \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( -\mathbb{P}_{ki} \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} + \mathbb{A}_{ki} \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} + \mathbb{B}_{ki} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right) \\
&\quad \left. + \left( \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \left( \mathbb{Q}_{ki} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{C}_{ki} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{D}_{ki} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k / \\ \mathcal{T}_{ik} \subset \Sigma}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left[ \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \mathbb{A}_{ik} + \mathbb{C}_{ik}^t \right) \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( -\mathbb{B}_{ik} + \mathbb{D}_{ik}^t \right) \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right. \\
&\quad \left. - \left( \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \mathbb{A}_{ik} + \mathbb{C}_{ik}^t \right) \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} - \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( -\mathbb{B}_{ik} + \mathbb{D}_{ik}^t \right) \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} \right]. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Ainsi, une condition suffisante de stabilité serait alors de la forme :

$$\mathbb{A}_{ik} = -\mathbb{C}_{ik}^t \tag{3.4}$$

et

$$\mathbb{B}_{ik} = \mathbb{D}_{ik}^t. \tag{3.5}$$

Plusieurs choix des matrices  $\mathbb{A}_{ik}, \mathbb{B}_{ik}, \mathbb{C}_{ik}$  et  $\mathbb{D}_{ik}$  sont donc possibles, conduisant chacun à un mode de fracturation particulier. L'objectif de cette thèse étant l'étude du mode cisailant, nous allons nous focaliser sur le calcul des matrices correspondant à ce mode.

Introduisons d'abord quelques notations utiles. Étant donnée une surface quelconque, nous désignons par  $\vec{n}$  et  $\vec{n}^\perp$  les vecteurs unitaires normal et tangent(s) à cette surface respectivement.  $(\vec{n}, \vec{n}^\perp)$  est donc une base orthonormée, et si  $\vec{w}$  désigne un vecteur donné, alors il se décompose dans cette base sous la forme :

$$\vec{w} = \vec{w}_N + \vec{w}_T$$

où  $\vec{w}_N = \vec{n}^t \vec{w} \vec{n}$  est la composante normale de  $\vec{w}$ , et  $\vec{w}_T = \vec{w} - \vec{w}_N$  est sa composante tangentielle.

Reprenons maintenant l'expression du vecteur des tractions sur la faille qui s'écrit :

$$\vec{T} = \underline{\sigma} \vec{n}, \tag{3.6}$$

### 3.1 Conditions aux limites sur la faille

où  $\vec{n}$  est une normale unitaire à la faille.

Un simple calcul montre que  $\vec{T}$  s'écrit aussi

$$\vec{T} = \mathbb{P} \vec{\sigma}. \quad (3.7)$$

Or, par (2.89), nous savons que le flux  $\mathcal{F}$  à travers une surface quelconque  $\mathcal{T}$  est donné par

$$\mathcal{F} = \mathbb{P} \vec{\sigma}_{/\mathcal{T}}. \quad (3.8)$$

Nous en déduisons que le flux  $\mathcal{F}$  à travers la surface  $\mathcal{T}$  n'est autre que le vecteur traction appliqué à cette surface.

En remplaçant  $\mathcal{F}$  par ses composantes dans la base  $(\vec{n}, \vec{n}^\perp)$ , et en notant  $\xi_{[ik]}$  la moyenne arithmétique  $\frac{\xi_i + \xi_k}{2}$  d'une quantité donnée  $\xi$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ik} &= \underline{\sigma}_{[ik]} \vec{n}_{ik} \\ &= (\underline{\sigma}_{[ik]} \vec{n}_{ik})_N + (\underline{\sigma}_{[ik]} \vec{n}_{ik})_T \\ &= \vec{n}_{ik} (\vec{n}_{ik}^t \underline{\sigma}_{[ik]} \vec{n}_{ik}) + \mathcal{F}_{ik_T}. \end{aligned}$$

En l'absence de forces extérieures sur la faille (c'est-à-dire  $\mathcal{F}_{ik_T} = 0$ ), l'énergie du système doit se conserver. L'expression de  $\mathcal{F}_{ik}$  se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ik} &= \vec{n}_{ik} (\vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_{[ik]}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i + \frac{1}{2} (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t - \mathbb{I}_3) \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i + \frac{1}{2} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_k. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Par l'étude de variation d'énergie effectuée précédemment et l'équation (3.1), nous pouvons déduire que les matrices  $\mathbb{A}_{ik}$  et  $\mathbb{B}_{ik}$  sont données par

$$\mathbb{A}_{ik} = (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t - \mathbb{I}_3) \mathbb{P}_{ik} \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{ik} = \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}, \quad (3.10)$$

et, via les équations (3.4) et (3.5), nous trouvons

$$\mathbb{C}_{ik} = \mathbb{Q}_{ik} (\mathbb{I}_3 - \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t) \quad \text{et} \quad \mathbb{D}_{ik} = \mathbb{Q}_{ik} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t. \quad (3.11)$$

L'étude des modes cisailants sur la surface d'une faille implique que les tractions tangentielles sur cette surface ne sont pas nulles. En effet, ces dernières doivent obéir aux conditions aux limites non homogènes (1.11). Pour cette raison, et afin de prendre en compte ces conditions, nous modifions l'écriture de  $\mathcal{F}_{ik_T}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{F}_{ik} = \vec{n}_{ik} (\vec{n}_{ik}^t \underline{\sigma}_{[ik]} \vec{n}_{ik}) + \vec{T}_{ik_T}, \quad (3.12)$$

---

2. La trace de  $\sigma$  sur  $\mathcal{T}$  étant prise dans notre cas égale à la moyenne arithmétique des champs de chaque côté de la face.

## Conditions aux limites

---

où  $\vec{T}_{ik_T}$  est la composante tangentielle du vecteur traction, et qui reste à déterminer afin que la condition (1.11) soit vérifiée. Mais avant de poursuivre les calculs, faisons ici la remarque suivante.

La condition aux limites (1.11) est en fait restrictive, dans le sens où elle ne s'applique que pour des points ayant une vitesse tangentielle<sup>3</sup> non nulle (c'est-à-dire lorsque le front de la faille atteint le point en question<sup>4</sup>). Une façon plus générale pour écrire les conditions aux limites sur la faille peut être donnée en terme d'inégalité au lieu de l'égalité mentionnée précédemment. Ainsi, nous écrivons plus généralement la condition aux limites sur la faille comme suit :

$$\| \vec{T}_T \| \leq g \text{ sur } \Sigma_f, \quad (3.13)$$

où  $\Sigma_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t)$  désigne l'étendue maximale de la faille<sup>5</sup>.

Examinons maintenant les deux cas de figure induits par cette inégalité.

i)  $\| \vec{T}_T \| < g$  sur  $\Sigma_f$ .

Dans le cas où l'inégalité est stricte, les tractions tangentielles appliquées à la surface de la faille sont strictement inférieures aux forces de frottement. La discontinuité des composantes tangentielles de la vitesse à travers la surface de la faille sur laquelle s'appliquent ces tractions doit donc être nulle. En d'autres termes, il faut que la vitesse de glissement à travers cette surface soit nulle. Cette dernière étant définie par

$$V(t, \vec{x}) := \| [\vec{v}_T(t, \vec{x})] \| = \| \vec{v}_T^+(t, \vec{x}) - \vec{v}_T^-(t, \vec{x}) \| \quad (3.14)$$

avec

$$\vec{v}_T^\pm(t, \vec{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{v}_T(t, \vec{x} \pm \varepsilon \vec{n}(\vec{x})) \quad (3.15)$$

et

$$\vec{v}_T = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (3.16)$$

Ainsi, dans le cas où  $\| \vec{T}_T \| < g$  sur  $\Sigma_f$ , l'égalité suivante doit être vérifiée

$$[\vec{v}_T(t, \vec{x})] = \vec{0}. \quad (3.17)$$

Ce cas de figure peut se produire lorsque la rupture dynamique n'a pas encore atteint le point considéré, ou bien lors de la phase d'arrêt, lorsque la faille atteint une longueur maximale au-delà de laquelle elle ne peut plus progresser (c'est-à-dire  $\Sigma_f$ )<sup>6</sup>.

---

3. Dite aussi vitesse de glissement. Une définition plus précise de cette dernière est donnée plus bas.

4. Nous rappelons que la faille évolue au cours du temps

5. Cette limite doit exister puisque, dans la nature, une faille ne peut évoluer indéfiniment. Ainsi, il existe un temps  $t_f$  pour lequel  $\Sigma(t) = \Sigma(t_f) := \Sigma_f$  pour tout  $t \geq t_f$ .

6. Les ondes générées par la progression de la faille peuvent être responsables de l'augmentation des tractions au point considéré. Ceci a pour conséquence dans certains cas de fragiliser le matériau (c'est-à-dire faire basculer la condition aux limites de l'état de l'inégalité stricte au cas de l'égalité). Ce cas de figure peut se produire lorsque la faille s'approche d'une surface libre (à cause des ondes réfléchies), ou dans le cas supersonique (c'est-à-dire lorsque la vitesse de rupture dépasse la vitesse des ondes de cisaillement).

ii)  $\|\vec{T}_T\| = g$  sur  $\Sigma_f$ .

Lorsque les tractions en un point donné de la surface de la faille atteignent la résistance maximale du matériau, ce dernier cède permettant à la rupture de progresser. La manière selon laquelle les tractions évoluent au point considéré est déterminée par la fonction  $g$ . Dans notre cas, nous avons choisi une loi dite “loi d’affaiblissement par frottement”<sup>7</sup>, donnée par

$$g(U) = \sigma_N \max \left[ \mu_s - (\mu_s - \mu_d) \frac{U}{\delta_c}, \mu_d \right] \quad (3.18)$$

où  $U$  désigne la fonction glissement, définie par

$$\begin{aligned} U(t, \vec{x}) &:= \int_0^t V(s, \vec{x}) ds \\ &= \int_0^t \|\llbracket \vec{v}_T(s, \vec{x}) \rrbracket\| ds. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le glissement et la vitesse de glissement dans ce cas sont donc non nuls.

#### 3.1.1 Cas des volumes finis

Afin de déterminer la fonction  $\vec{T}_T$  vérifiant les critères cités ci dessus, et pour mieux comprendre la démarche que nous allons suivre, nous proposons d’étudier dans un premier temps le cas le plus simple correspondant au schéma volumes finis (2.75)-(2.76). Reprenons donc l’expression de la vitesse (2.75) qui s’écrit :

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2}, \quad (3.20)$$

ou encore

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{k \in V(i) \\ \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \not\subset \Gamma}} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} + \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{k \in V(i) \\ \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \subset \Gamma}} S_{ik} \vec{T}_{ik}. \quad (3.21)$$

Notons  $\vec{R}_i^n$  la quantité

$$\vec{R}_i^n = \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{k \in V(i) \\ \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \not\subset \Gamma}} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2}. \quad (3.22)$$

L’équation (3.21) s’écrit alors :

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_i^n + \frac{\Delta t S_{ik}}{\rho_i V_i} \vec{T}_{ik}, \quad (3.23)$$

7. En anglais “Slip weakening friction” (SWF).

8. Voir équation (1.17) pour plus de détails sur les différents paramètres.

## Conditions aux limites

avec  $k \in V(i)$  tel que  $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \subset \Gamma$ . Rappelons qu'à ce stade, il n'est pas certain que la partie tangentielle de  $\vec{T}_{ik}$  vérifie l'inégalité (3.13).

Calculons maintenant la discontinuité de la composante tangentielle de la vitesse à travers  $\mathcal{T}_{ik} \subset \Gamma$ . Nous avons par (3.23)

$$\llbracket \vec{v}_T^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket := \vec{v}_{i_T}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_{k_T}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

$$= \llbracket \vec{v}_T^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket + \vec{R}_{i_T}^n - \vec{R}_{k_T}^n + \Delta t S_{ik} \left( \frac{1}{\rho_i V_i} + \frac{1}{\rho_k V_k} \right) \vec{T}_{ik_T}^n \text{ }^9. \quad (3.25)$$

Notons  $\vec{T}_{ik_T}^n$  le vecteur défini par

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \frac{\left( -\llbracket \vec{v}_T^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket - \vec{R}_{i_T}^n + \vec{R}_{k_T}^n \right) \rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)}. \quad (3.26)$$

Ce vecteur correspond en fait à la traction "fictive" nécessaire pour assurer la continuité de la vitesse tangentielle sur la faille. Or la condition aux limites (3.13) impose que la norme du vecteur traction soit borné par la fonction  $g$ . Nous définissons donc le vecteur traction par

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \begin{cases} \vec{T}_{ik_T}^n & \text{si } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| < g(U^n) \\ \frac{\vec{T}_{ik_T}^n}{\|\vec{T}_{ik_T}^n\|} g(U^n) & \text{si } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| \geq g(U^n). \end{cases} \quad (3.27)$$

Ce choix respecte bien la condition aux limites (3.13) puisque le module des tractions tangentielles reste toujours inférieur ou égal à la valeur  $g$ , mais assure aussi la continuité des vitesses tangentielles si l'inégalité dans l'expression (3.13) est stricte.

**Remarque 3.1.2** *L'expression de  $\vec{T}_{ik_T}^n$  est complètement explicite puisque, à l'instant  $n$ , le vecteur  $\vec{v}_T^{n-\frac{1}{2}}$  est connu, et ainsi donc le glissement  $U^n$  qui peut être calculé via l'équation (3.19) par*

$$U^n = U^{n-1} + \Delta t \|\llbracket \vec{v}_T^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket\|. \quad (3.28)$$

Finalement, le flux  $\mathcal{F}_{ik}$  sur la faille est donné par

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \mathcal{F}_{ik_N}^n + \vec{T}_{ik_T}^n \quad (3.29)$$

avec

$$\mathcal{F}_{ik_N}^n = \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2}, \quad (3.30)$$

et  $\vec{T}_{ik_T}^n$  est le vecteur donné par (3.27).

---

9. Nous avons  $\vec{T}_{ki} = -\vec{T}_{ik}$  car  $\mathbb{P}_{ki} = -\mathbb{P}_{ik}$  (voir remarque 2.4.1).

### 3.1.2 Cas général

Nous allons suivre la démarche précédente afin de l'étendre au cas plus général du schéma GD (2.72)-(2.73).

Considérons donc le cas où :

- la face sur la faille est située entre deux éléments  $\mathcal{T}_i$  et  $\mathcal{T}_k$ .
- nous utilisons des éléments finis de degré  $k_i$  dans la cellule  $\mathcal{T}_i$  (c'est-à-dire l'espace vectoriel  $\mathcal{P}_i$  sur  $\mathcal{T}_i$  est de dimension  $d_i = \binom{n+k_i}{n}$  (cf. equation 2.74)).
- nous utilisons des éléments finis de degré  $k_k$  dans la cellule  $\mathcal{T}_k$  ( $d_k = \binom{n+k_k}{n}$ ).
- nous cherchons une traction tangentielle sous la forme d'un champ de vecteur tangentiel, dont les composantes sont des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k_*$  ( $d_* = \binom{n+k_*}{n}$ ).
- nous supposons que les familles de fonctions de base sont les mêmes pour les vitesses et les contraintes.

Reprenons l'équation (2.81) qui peut s'écrire de la façon suivante :  $\forall 1 \leq l \leq d_i$ ,

$$\begin{aligned} \rho_i \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{il}^t \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi}_{il})^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in V(i) \\ j \neq k}} \int_{\mathcal{T}_{ij}} \vec{\varphi}_{il}^t \mathbb{P}_{ij} (\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_j^n) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{il}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}} \left( \mathbb{P}_{ik} (\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n) \right) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{il}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \left( \mathbb{P}_{ik} (\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n) \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $\Pi_{\vec{n}} = \vec{n} \otimes \vec{n}$  désigne la projection orthogonale sur  $\text{vect} < \vec{n} >$ , et  $\Pi_{\vec{n}^\perp} = \mathbb{I}_n - \vec{n} \otimes \vec{n}$  est la projection orthogonale sur l'espace complémentaire à  $\text{vect} < \vec{n} >$ .

Par analogie à l'équation (3.12), nous remplaçons la partie tangentielle des tractions donnée par  $\mathcal{F}_{ik_T}$  par un vecteur  $\vec{T}_{ik_T}$  à déterminer de façon à respecter les conditions (3.13). En regroupant les termes dans l'équation (3.31), nous pouvons écrire cette dernière sous la forme :  $\forall 1 \leq l \leq d_i$ ,

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_i \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{il}^t \frac{\vec{R}_i^n - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = & - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{\varphi}_{il})^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in V(i) \\ j \neq k}} \int_{\mathcal{T}_{ij}} \vec{\varphi}_{il}^t \mathbb{P}_{ij} (\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_j^n) \\ & + \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{il}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}} \left( \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \right) \\ \rho_i \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{il}^t \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{R}_i^n}{\Delta t} = & \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{il}^t \vec{T}_{ik_T}. \end{aligned} \right. \quad (3.32)$$

## Conditions aux limites

Nous avons donc

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{il}^t \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{il}^t \vec{R}_i^n + \frac{\Delta t}{\rho_i} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{il}^t \vec{T}_{ikT} \quad \forall 1 \leq l \leq d_i, \quad (3.33)$$

et similairement

$$\int_{\mathcal{T}_k} \vec{\varphi}_{kl'}^t \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} = \int_{\mathcal{T}_k} \vec{\varphi}_{kl'}^t \vec{R}_k^n - \frac{\Delta t}{\rho_k} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{kl'}^t \vec{T}_{ikT} \quad \forall 1 \leq l' \leq d_k. \quad (3.34)$$

Nous cherchons également à vérifier de manière faible l'équation (3.17). Le vecteur des tractions tangentielles  $\vec{T}_{ikT}$  étant défini sur la surface  $\mathcal{T}_{ik}$ , nous allons réécrire l'équation (3.17) de manière faible en utilisant comme fonctions-tests les fonctions de  $\mathbb{P}_{k*}(\mathcal{T}_{ik})$ , de manière à obtenir un système linéaire carré.

$$\forall \vec{\varphi} \in \mathbb{P}_{k*}(\mathcal{T}_{ik}), \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}^t \left[ \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0, \quad (3.35)$$

c'est-à-dire,

$$\forall \vec{\varphi} \in \mathbb{P}_{k*}(\mathcal{T}_{ik}), \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}^t \left( \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}^t \left( \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (3.36)$$

Il s'agit donc de trouver  $\vec{T}_{ikT} \in \mathbb{P}_{k*}(\mathcal{T}_{ik})$  vérifiant (3.33)-(3.34)-(3.36).

Réécrivons maintenant les équations précédentes en notation matricielle. En adoptant la notation suivante :

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{I}_n \otimes \mathbb{A} \quad (3.37)$$

pour toute matrice  $\mathbb{A}$ , l'équation (3.33) s'écrit :

$$\tilde{\mathbb{K}}_i \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbb{K}}_i \vec{R}_i^n + \frac{\Delta t}{\rho_i} \tilde{\mathbb{S}}_{i*} \vec{T}_{ikT}^n, \quad (3.38)$$

où

- $\tilde{\mathbb{K}}_i$  est la matrice de masse dans l'élément  $\mathcal{T}_i$  donnée par  $(\tilde{\mathbb{K}}_i)_{js} = \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{\varphi}_{is}$  avec  $1 \leq j, s \leq d_i$  (c'est-à-dire que le terme général de la matrice  $\mathbb{K}_i$  est  $(\mathbb{K}_i)_{js} = \int_{\mathcal{T}_i} \varphi_{ij} \varphi_{is}$ ).
- $\tilde{\mathbb{S}}_{i*}$  est la matrice de masse dans la face  $\mathcal{T}_{ik}$ , de terme général  $(\tilde{\mathbb{S}}_{i*})_{js} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{ij}^t \vec{\varphi}_{*s}$  avec  $1 \leq j \leq d_i$  et  $1 \leq s \leq d_*$  (c'est-à-dire que le terme général de la matrice  $\mathbb{S}_{i*}$  est  $(\mathbb{S}_{i*})_{js} = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{*s}$ ).

Ainsi, les équations (3.33) et (3.34) se réécrivent respectivement :

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{R}_i^n + \frac{\Delta t}{\rho_i} \tilde{\mathbb{K}}_i^{-1} \tilde{\mathbb{S}}_{i*} \vec{T}_{ikT}^n \quad (3.39)$$

et

$$\vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} = \vec{R}_k^n - \frac{\Delta t}{\rho_k} \tilde{\mathbb{K}}_k^{-1} \tilde{\mathbb{S}}_{k*} \vec{T}_{ikT}^n. \quad (3.40)$$



Enfin, (3.36) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \forall \vec{\varphi} \in \mathbb{P}_{k_*}(\mathcal{T}_{ik}), \quad \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}^t \left( \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}^t \left( \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall 1 \leq l \leq d_*, \quad \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{*l}^t \left( \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) = \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{*l}^t \left( \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall 1 \leq l \leq d_*, \quad \sum_{j=1}^{d_i} \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} v_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{*l}^t \vec{\varphi}_{ij} = \sum_{s=1}^{d_k} \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} v_{ks}^{n+\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\varphi}_{*l}^t \vec{\varphi}_{ks} \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall 1 \leq l \leq d_*, \quad \sum_{j=1}^{d_i} \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \mathbf{v}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \left( \tilde{\mathbf{S}}_{i*} \right)_{jl} = \sum_{s=1}^{d_k} \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \mathbf{v}_{ks}^{n+\frac{1}{2}} \left( \tilde{\mathbf{S}}_{k*} \right)_{sl} \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall 1 \leq l \leq d_*, \quad \sum_{j=1}^{d_i} \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \mathbf{v}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \left( \tilde{\mathbf{S}}_{i*} \right)_{lj}^t = \sum_{s=1}^{d_k} \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \mathbf{v}_{ks}^{n+\frac{1}{2}} \left( \tilde{\mathbf{S}}_{k*} \right)_{ls}^t \\
 \Leftrightarrow & \quad \tilde{\mathbf{S}}_{i*}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{S}}_{k*}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}}. \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Ainsi, les équations (3.39), (3.40) et (3.41) se réécrivent : trouver  $\vec{T}_{ik_T} \in \mathbb{P}_{k_*}(\mathcal{T}_{ik})$  tel que

$$\tilde{\mathbf{S}}_{i*}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{\mathbf{R}}_i^n + \frac{\Delta t}{\rho_i} \tilde{\mathbf{S}}_{i*}^t \tilde{\mathbb{K}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{i*} \vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n = \tilde{\mathbf{S}}_{k*}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{\mathbf{R}}_k^n + \frac{\Delta t}{\rho_k} \tilde{\mathbf{S}}_{k*}^t \tilde{\mathbb{K}}_k^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{k*} \vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n, \tag{3.42}$$

ou encore

$$\left( \frac{\Delta t}{\rho_i} \tilde{\mathbf{S}}_{i*}^t \tilde{\mathbb{K}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{i*} + \frac{\Delta t}{\rho_k} \tilde{\mathbf{S}}_{k*}^t \tilde{\mathbb{K}}_k^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{k*} \right) \vec{\mathbf{T}}_{ik_T}^n = \tilde{\mathbf{S}}_{i*}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{\mathbf{R}}_i^n + \tilde{\mathbf{S}}_{k*}^t \Pi_{\vec{n}_{ik}^\perp} \vec{\mathbf{R}}_k^n. \tag{3.43}$$

Il faut donc inverser un (en 2D et deux en 3D) système linéaire carré de taille  $d_*$  de la forme  $\mathbb{Q} \vec{T} = \vec{Y}$  où la matrice  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_i + \mathbb{Q}_k$  avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}_i &= \frac{\Delta t}{\rho_i} \mathbf{S}_{i*}^t \mathbb{K}_i^{-1} \mathbf{S}_{i*} \\
 \mathbb{Q}_k &= \frac{\Delta t}{\rho_k} \mathbf{S}_{k*}^t \mathbb{K}_k^{-1} \mathbf{S}_{k*}^{10}.
 \end{aligned}$$

Les matrices  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}_i$  et  $\mathbb{Q}_k$  sont clairement symétriques et positives. Il suffit donc de montrer que  $\mathbb{Q}$  est définie pour s'assurer que le système linéaire admet une solution unique.

**Lemme 3.1.1** *La matrice  $\mathbb{Q}_i$  est définie positive si  $k_* \leq k_i$ .*

**Preuve 3.1.1** *Nous avons :*

$$\mathbb{Q}_i \vec{U} = \vec{0} \implies \vec{U}^t \mathbf{S}_{i*}^t \mathbb{K}_i^{-1} \mathbf{S}_{i*} \vec{U} = 0 \iff \mathbf{S}_{i*} \vec{U} = \vec{0}.$$

10. Les matrices  $\tilde{\mathbf{S}}^t \tilde{\mathbb{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}$  sont diagonales par bloc, et chaque bloc vaut  $\mathbf{S}^t \mathbb{K}^{-1} \mathbf{S}$ .

## Conditions aux limites

---

Ainsi, pour toute fonction  $\varphi_i$  dans  $\mathbb{P}_{k_i}(\mathcal{T}_i)$ , nous avons

$$\int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{u} \varphi_i = \vec{0}.$$

Maintenant, si  $k_* \leq k_i$  alors le champ  $\vec{u}$  qui est dans  $\mathbb{P}_{k_*}(\mathcal{T}_{ik})$  est aussi dans  $\mathbb{P}_{k_i}(\mathcal{T}_{ik})$  et donc nous en déduisons que  $\vec{u}$  est un champ dans  $\mathbb{P}_{k_i}(\mathcal{T}_{ij})$  orthogonal (au sens du produit scalaire  $L^2$  sur la face) à toutes les traces des fonctions  $\varphi_i$ . Or ces traces parcourent tout l'ensemble des champs  $\mathbb{P}_{k_i}(\mathcal{T}_{ik})$ . Donc  $\vec{u}$  est un champ dans  $\mathbb{P}_{k_i}(\mathcal{T}_{ik})$  orthogonal (au sens du produit scalaire  $L^2$  sur la face) à tous les champs dans  $\mathbb{P}_{k_i}(\mathcal{T}_{ik})$ . En particulier, il est orthogonal à lui-même. Donc  $\int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  donc  $\vec{U} = \vec{0}$ .

Nous avons de même :

**Lemme 3.1.2** *La matrice  $\mathbb{Q}_k$  est définie positive si  $k_* \leq k_k$ .*

Nous en déduisons le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1** *La matrice  $\mathbb{Q}$  est définie positive si  $k_* \leq \max(k_i, k_k)$ .*

Ainsi, il suffit de choisir  $k_* = \max(k_i, k_k)$  pour déduire via l'équation (3.43) l'expression du vecteur des tractions tangentiellles qui permet d'annuler la vitesse de glissement sur la faille. Ce choix est valable tant que la norme de ce dernier reste inférieur au seuil imposé par la loi de frottement (3.13).

**Remarque 3.1.3** *Le choix  $k_* = \min(k_i, k_k)$  semble plus naturel. En fait, il permet un calcul plus simple des différentes matrices mais affaiblit en contrepartie la précision du vecteur des tractions.*

Reste maintenant à déterminer le vecteur des tractions dans le cas où la norme de celui donné par l'équation (3.43) est supérieur à la valeur autorisée par la loi de frottement. Un choix simple consiste à définir ce vecteur en procédant de manière analogue au choix (3.27). Malheureusement, ce procédé ne permet pas d'assurer, dans un cas général, que l'inégalité (3.13) soit vérifiée en tout point de la surface  $\mathcal{T}_{ik}$ . En effet, hormis le cas le plus simple où l'on considère des fonctions de base barycentriques  $\mathbb{P}_1$ <sup>11</sup>, imposer l'inégalité (3.13) sur les degrés de liberté ne permet pas de vérifier automatiquement que cette dernière soit respectée en tout point de la face. Un choix plausible serait donc de construire des fonctions de base qui assurent une telle propriété (c'est-à-dire dont les enveloppes convexes des fonctions de base restent à l'intérieur de la sphère unité). Cette construction est possible [130], mais pose un problème d'unicité, puisque chaque fonction de base est définie sur un noeud donné par une combinaison (non nécessairement linéaire) des polynômes de Lagrange. Le choix d'un vecteur traction tangentiel  $\vec{T}_T \in \mathbb{P}_{k_*}(\partial \mathcal{T})$  dans le cas où  $k_* \geq 2$  reste donc un problème ouvert.

**Remarque 3.1.4** *Il est intéressant de calculer la variation de l'énergie totale du système dans le cas où les forces extérieures exercées sur la faille ne sont pas nulles. Reprenons*

---

11. C'est-à-dire des polynômes de Lagrange de degré inférieur ou égal à un, qui valent 1 sur un sommet du tétraèdre et 0 sur les autres sommets.

### 3.1 Conditions aux limites sur la faille

donc l'expression de la variation d'énergie et remplaçons  $\mathcal{F}_{ik}$  par sa nouvelle valeur (3.29). Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{i,k/ \\ \mathcal{T}_{ik} \subset \Sigma(t)}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \vec{T}_{ik_T}^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \vec{T}_{ki_T}^{[n+\frac{1}{2}]} \\
 &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{i,k/ \\ \mathcal{T}_{ik} \subset \Sigma(t)}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_{i_T}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_{k_T}^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \vec{T}_{ik_T}^{[n+\frac{1}{2}]} \\
 &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{i,k/ \\ \mathcal{T}_{ik} \subset \Sigma(t)}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \llbracket \vec{v}_T^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket \cdot \vec{T}_{ik_T}^{[n+\frac{1}{2}]} .
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

L'équation (3.44) montre que la variation de l'énergie du système est donnée par le saut de la composante tangentielle de la vitesse à travers la surface de la faille multiplié par les forces extérieures exercées sur cette surface. Nous retrouvons ainsi une expression analogue au travail réalisé par les forces de cohésion, donnée en (1.18).

L'étude de la variation d'énergie a permis, outre la bonne prise en compte des conditions aux limites sur les contraintes, de prescrire les conditions aux limites sur les vitesses. En effet, l'équation (3.2) et les identités (3.11) montre que le flux des vitesses à travers la surface de la faille n'est plus une simple moyenne des champs de part et d'autre de la surface de la faille, mais a subi une modification. Pour voir comment cela se traduit, reprenons l'équation (3.2) et remplaçons les matrices  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{D}$  par leurs expressions (3.11). Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{ij} &= \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} \vec{v}_i + \frac{1}{2} (\mathbb{Q}_{ij} (\mathbb{I}_3 - \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t) \vec{v}_i + \mathbb{Q}_{ik} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \vec{v}_k) \\
 &= \mathbb{Q}_{ik} \left( \vec{v}_i - \frac{1}{2} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t (\vec{v}_i - \vec{v}_k) \right) .
 \end{aligned}$$

En notant  $\vec{v}_{ik} = \vec{v}_i - \frac{1}{2} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t (\vec{v}_i - \vec{v}_k)$ , nous avons :

$$\vec{v}_{ik} \cdot \vec{n}_{ik} = \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_k}{2} \cdot \vec{n}_{ik} \tag{3.45}$$

et

$$\vec{v}_{ik_T} = \vec{v}_{i_T} . \tag{3.46}$$

L'équation (3.45) montre que la composante normale de la vitesse dépend des champs locaux de part et d'autre de l'interface. Elle est donc continue. L'équation (3.46) montre par contre que la composante tangentielle de la vitesse dépend d'un seul champ local situé de part ou d'autre de la surface de la faille. Cette composante est donc discontinue.

## 3.2 Conditions aux limites absorbantes

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux conditions aux limites dites absorbantes, et qui ont pour but de simuler un domaine infini. Le calcul détaillé des flux absorbants sera donné dans l'annexe A. Nous nous limiterons ici à montrer que, pour le choix de ces flux absorbants, l'énergie du système décroît au cours du temps.

Sur le bord extérieur  $\partial\Omega$  du domaine, nous proposons les flux absorbants suivants :

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^n - \frac{1}{2} \mathbb{A} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \quad (3.47)$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^n, \quad (3.48)$$

où  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont deux matrices symétriques positives (voir annexe A).

En reprenant le calcul de la variation d'énergie (2.90), et en remplaçant les flux  $\mathcal{F}_{ik}$  et  $\mathcal{G}_{ik}$  par leurs expressions (3.47) et (3.48), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{\Delta t} &= \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \mathcal{F}_{ik}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right) + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left[ \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( -\frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} - \frac{1}{4} \mathbb{A} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \left( \mathbb{Q}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^n \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + (\vec{\sigma}_i^n)^t \mathbb{B}^t (\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_i^{n+1}). \end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{B}$  est symétrique, la variation de l'énergie totale s'écrit

$$\Delta E = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + (\vec{\sigma}_i^n)^t \mathbb{B} (\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_i^{n+1}). \quad (3.49)$$

Cette quantité n'est pas nécessairement négative ou nulle. En effet, la définition de l'énergie discrète  $E^n$  proposée en (2.79) est basée explicitement sur un décentrage amont en temps, et donc dépend particulièrement du choix de  $\mathcal{F}_{ik}^n$ . Cela justifie l'introduction de termes correctifs.

Considérons la quantité suivante :

$$\mathcal{E}^n = E^n + \frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} - (\vec{\sigma}_i^n)^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^n. \quad (3.50)$$

### 3.2 Conditions aux limites absorbantes

$\mathcal{E}^n$  est bien une forme quadratique des variables  $\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}$  et  $\vec{\sigma}_i^n$ , puisque somme de deux formes quadratiques<sup>12</sup>.

Montrons maintenant que la suite  $(\mathcal{E}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. La variation de  $\mathcal{E}^n$  s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\ &= \Delta E + \frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{interfaces} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \left( \vec{\sigma}_i^{n+1} \right)^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^{n+1} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{interfaces} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} - \left( \vec{\sigma}_i^n \right)^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^n \\ &= -\frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{interfaces} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \left( \vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_i^{n+1} \right)^t \mathbb{B} \left( \vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_i^{n+1} \right). \end{aligned}$$

$\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  étant des matrices symétriques positives (voir annexe A), elles définissent des semi-normes données par

$$\| \vec{x} \|_{\mathbb{M}} = \sqrt{\vec{x}^t \mathbb{M} \vec{x}} \quad \text{pour } \mathbb{M} = \mathbb{A}, \mathbb{B}.$$

Ainsi, la variation de  $\mathcal{E}$  s'écrit

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{interfaces} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left\| \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbb{A}}^2 + \left\| \vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_i^{n+1} \right\|_{\mathbb{B}}^2 \leq 0, \quad (3.51)$$

et donc la suite  $(\mathcal{E}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

**Remarque 3.2.1** Cette étude montre que la variation de l'énergie (3.50) reste négative pour tout choix de  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$ , pourvu que ces dernières soient positives; ce qui en d'autres termes nous laisse une infinité de choix de flux absorbants. Cependant, ce choix ne peut pas être aussi arbitraire afin de préserver la prise en compte de manière faible de la condition d'onde sortante. De plus, comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit, la stabilité du schéma dépend d'un choix de pas de temps qui lui même dépend, entre autre, du rayon spectral de  $\mathbb{A}$  et de  $\mathbb{B}$ . Ainsi un rayon spectral plus grand de ces matrices accélérerait peut-être la décroissance de  $\mathcal{E}^n$ , mais diminuerait aussi le pas de temps maximal assurant la stabilité du schéma.

Il reste finalement à montrer que  $\mathcal{E}^n$  est définie positive. Pour ce faire, réécrivons  $\mathcal{E}^n$  en

---

12. Notons que la modification du flux  $\mathcal{F}_{ik}^n$  sur une interface absorbante ne change pas la dépendance linéaire de ce dernier par rapport à la variable  $\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}$ . Il en est donc de même pour  $E^n$ .

## Conditions aux limites

remplaçant  $E^n$  par son expression donnée en (2.92). Nous obtenons

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}^n &= \sum_i \left[ \int_{\mathcal{T}_i} \rho_i \|\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2 - \Delta t \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} \left( \partial_\alpha \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i^n \right. \\
&\quad \left. + \Delta t \sum_{k \in V(i)} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathcal{F}_{ik}^n + \int_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i^n\|_{\Lambda_{0i}}^2 \right] \\
&\quad + \frac{\Delta t}{4} \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{absorbantes}}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} - (\vec{\sigma}_i^n)^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^n \\
&\geq \sum_i \sum_{k \in V(i)} \left[ \frac{S_{ik}}{S_i} \left( \rho_i \|\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0i}) \|\vec{\sigma}_i^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \Delta t \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} \left( \partial_\alpha \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i^n \right) \right. \\
&\quad \left. + \Delta t \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathcal{F}_{ik}^n \right] \\
&\quad + \frac{\Delta t}{4} \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{absorbantes}}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} - (\vec{\sigma}_i^n)^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i^n \\
&\geq \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{internes}}} E_{ik}^n + \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{absorbantes}}} E_i^n
\end{aligned}$$

où  $E_{ik}^n$  est donnée par (2.94), et

$$\begin{aligned}
E_i^n &= \frac{S_{ik}}{S_i} \left( \rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \Delta t \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{v}_i)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{v}_i^t (\mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i - \mathbb{A} \vec{v}_i) + \frac{\Delta t}{4} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{v}_i^t \mathbb{A} \vec{v}_i - \vec{\sigma}_i^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i \\
&= \frac{S_{ik}}{S_i} \left( \rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \Delta t \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} (\partial_\alpha \vec{v}_i)^t \mathbb{M}_\alpha \vec{\sigma}_i \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} \left( \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{\sigma}_i^t \mathbb{B} \vec{\sigma}_i + \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{v}_i^t \mathbb{A} \vec{v}_i - 2 \int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{v}_i^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i \right) \text{ }^{13}.
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de minorer  $E_i^n$ , l'étude de  $E_{ik}^n$  étant déjà faite dans le chapitre précédent.

En utilisant les hypothèses de la définition 2.7.1 et l'inégalité de Hölder, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
E_i^n &\geq \frac{S_{ik}}{S_i} \left( \rho_i \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0i}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \frac{\pi a_i S_i \Delta t}{V_i} \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t b_{ik} S_{ik}}{4 V_i} \left( \mathbf{r}^+(\mathbb{B}) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \mathbf{r}^+(\mathbb{A}) \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + 2 \pi \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i} \right),
\end{aligned}$$

---

13. Nous avons omis ici aussi les exposants temporels pour alléger l'écriture.

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{E_i^n}{S_{ik}} &\geq \left( \frac{\rho_i}{S_i} - \frac{\mathbf{r}^+(\mathbb{A}) b_{ik} \Delta t}{4 V_i} \right) \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \left( \frac{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}{S_i} - \frac{\mathbf{r}^+(\mathbb{B}) b_{ik} \Delta t}{4 V_i} \right) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 \\
 &\quad - \frac{\pi (2 a_i + b_{ik}) \Delta t}{2 V_i} \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i} \\
 &\geq \left( \frac{\rho_i}{S_i} - \frac{(\mathbf{r}^+(\mathbb{A}) b_{ik} + \rho_i \pi (2 a_i + b_{ik})) \Delta t}{4 V_i \sqrt{\rho_i \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} \right) \|\vec{v}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 \\
 &\quad + \left( \frac{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}{S_i} - \frac{(\mathbf{r}^+(\mathbb{B}) b_{ik} + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i}) \pi (2 a_i + b_{ik})) \Delta t}{4 V_i \sqrt{\rho_i \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}} \right) \|\vec{\sigma}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 .
 \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que  $E_i^n$  soit définie positive est donc :

$$\Delta t < \frac{4 V_i \sqrt{\rho_i \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}}{S_i} \min \left( \frac{\rho_i}{\mathbf{r}^+(\mathbb{A}) b_{ik} + \rho_i \pi (2 a_i + b_{ik})}, \frac{\mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i})}{\mathbf{r}^+(\mathbb{B}) b_{ik} + \mathbf{r}^-(\Lambda_{0_i}) \pi (2 a_i + b_{ik})} \right) \quad \forall \mathcal{T}_i \in \partial \Omega \quad (3.52)$$

Ainsi, pour un pas de temps vérifiant les conditions (2.91) et (3.52),  $\mathcal{E}^n$  est une forme quadratique définie positive, décroissante au cours du temps. Ceci achève la démonstration.

## Conclusion

Dans cette section, nous avons défini les flux numériques qu'il faut choisir afin de vérifier les conditions aux limites sur la faille pour le mode cisailant d'une part, et d'assurer la stabilité du schéma d'autre part. Ce dernier point découle de la définition et l'étude de l'énergie du système dont nous avons montré qu'elle se conserve dans le cas où les conditions aux limites sont homogènes. Dans le cas de conditions aux limites non homogènes, nous avons montré que cette variation reste bornée, et dépend des lois de frottement appliqués sur la surface de la faille. Nous avons également défini des flux absorbants sur le bord extérieur du domaine afin de simuler un domaine infini. Le calcul détaillé des expressions de ces flux est donné dans l'annexe A.

# Chapitre 4

## Résultats numériques

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>4.1 Résultats 2D</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>4.2 Résultats 3D</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>113</b>

---

### Introduction

Nous proposons dans cette section de valider la méthode que nous avons présentée à travers divers cas tests effectués durant cette thèse. La première partie est dédiée au cas bidimensionnel et la deuxième au cas tridimensionnel. Tous les résultats qui suivent ont été obtenus en utilisant le schéma présenté dans la section précédente dans sa version volumes finis.

#### 4.1 Résultats 2D

Nous présentons dans ce paragraphe divers cas tests afin de valider notre méthode. Nous avons étudié dans un premier temps le cas d'une faille plane évoluant à une vitesse constante prédéfinie. Ce cas test académique est le seul pour lequel une solution analytique existe (pour le mode en cisaillement plan). À l'instant initial, une faille ponctuelle apparaît au centre du domaine et évolue bilatéralement suivant une direction rectiligne. En raison de la singularité qui accompagne le front de la faille, nous avons introduit un Laplacien diffusif dans les équations de l'élastodynamique afin d'atténuer les oscillations hautes fréquences induites par la discrétisation spatiale lors de l'avancement de la rupture. Les résultats obtenus sont en parfait accord avec les solutions théoriques.



Nous nous sommes intéressés dans un second temps au cas de rupture spontanée pour lequel la vitesse de la faille n'est pas prédéfinie. L'initiation de la rupture se fait à partir d'une zone de nucléation préexistante. L'évolution de la faille se fait ensuite suivant une géométrie définie au préalable et en obéissant à la loi SWF introduite dans le chapitre 1. L'absence de solution analytique pour ce type de problème nous contraint à comparer nos solutions numériques avec celles issues d'autres méthodes numériques afin de valider les résultats. Parmi ces méthodes, nous avons sélectionné l'approche développée par Victor-Manuel Cruz Atienza [50] suivant une méthode de différences finies. Cette méthode a été validée par comparaison avec une méthode intégrale de frontière. Les résultats obtenus sont aussi en accord et montrent que la faille adopte un comportement similaire pour les différentes approches.

Ce paragraphe a fait l'objet d'une publication dans le journal *Geophysical International Journal*.

# Dynamic non-planar crack rupture by a finite volume method

M. Benjema<sup>1,2</sup>, N. Glinsky-Olivier<sup>1</sup>, V. M. Cruz-Atienza<sup>2,3</sup>, J. Virieux<sup>2</sup> and S. Piperno<sup>1</sup>

<sup>1</sup>INRIA-ENPC, CAIMAN project, Sophia-Antipolis, France. E-mail: Mondher.Ben\_Jemaa@sophia.inria.fr

<sup>2</sup>CNRS, Géosciences Azur, Sophia-Antipolis, France

<sup>3</sup>Department of Geological Sciences, San Diego State University, USA

Accepted 2007 May 15. Received 2007 April 28; in original form 2006 January 9

## SUMMARY

Modelling dynamic rupture for complex geometrical fault structures is performed through a finite volume method. After transformations for building up the partial differential system following explicit conservative law, we design an unstructured bi-dimensional time-domain numerical formulation of the crack problem. As a result, arbitrary non-planar faults can be explicitly represented without extra computational cost. On these complex surfaces, boundary conditions are set on stress fluxes and not on stress values. Prescribed rupture velocity gives accurate solutions with respect to analytical ones depending on the mesh refinement, while solutions for spontaneous propagation are analysed through numerical means. An example of non-planar spontaneous fault growth in heterogeneous media demonstrates the good behaviour of the proposed algorithm as well as specific difficulties of such numerical modelling.

**Key words:** boundary conditions, dynamic rupture, finite volume approach, friction law, numerical methods, seismic source.

## 1 INTRODUCTION

As the number of unsaturated seismograms recorded nearby the earthquake rupture zone increases dramatically, understanding the physics of the rupture process requires more and more sophisticated tools where the geometry of the ruptured surface is taken into account as well as realistic friction laws on this surface. New formulations have recently been proposed for modelling the dynamic shear crack rupture when considering the complexity of earthquake mechanisms embedded in heterogeneous crustal structure (Kame & Yamashita 1999; Ando *et al.* 2004; Cruz-Atienza & Virieux 2004; Huang & Costanzo 2004). Boundary integral equation formulations (Das & Aki 1977; Tada & Yamashita 1977; Andrews 1985; Bécache & Duong 1994; Tada & Madariaga 2001) provide highly accurate field estimations nearby the crack at the expense of a rather simple medium description. Finite element formulations (Day 1977; Cohen & Fauqueux 2001), especially spectral formulations (Komatitsch & Vilotte 1998; Capdeville *et al.* 2003; Chaljub *et al.* 2003), have proved to be quite accurate for handling spontaneous propagation while considering complex crack structure (Festa & Vilotte 2005). Finally, finite difference approach (Madariaga 1976; Virieux & Madariaga 1982; Olsen *et al.* 1997; Madariaga *et al.* 1998) turns out to be quite efficient for 3-D configurations at the expense of less accurate field estimations nearby the crack (Madariaga 2005). Differences between these methods depend essentially on how boundary conditions are imposed on the discrete numerical formulation.

Other numerical methods, as the finite volume (FV) approach (LeVeque 2002), have been used for wave propagation, applied

to the elastodynamic equations with mitigated results (Dormy & Tarantola 1995), although new interest has been raised recently by Käser & Iske (2005). Zhang (2005) proposed an hybrid scheme by writing the integral forms of the elastic-momentum equations together with a triangular finite difference operator with good results when considering scattering by cracks in both homogeneous and heterogeneous media. Other approaches using various formulations as finite element and discontinuous Galerkin methods for dynamic rupture in elastic media could be found in Moës & Belytschko (2002) and Huang & Costanzo (2004). They rely essentially on weak formulations of boundary conditions. With that respect, we believe that our presentation based on a discrete energy conservation is new.

We propose in this paper a complete reanalysis of the FV approach with a great attention to boundary conditions. We shall apply it to the dynamic crack rupture problem for an arbitrary geometry of the crack surface. We first introduce the elastodynamic equations as well as boundary conditions to be applied on the crack surface. We build up the FV scheme as a piecewise constant description of both velocity and stress on triangular mesh in a 2-D geometry which is equivalent to a *P0* discontinuous Galerkin approach (Remaki 2000; Piperno *et al.* 2002). Through a careful analysis of total discrete energy, we specify boundary conditions on the crack in order to insure the correct discrete energy time variation and, therefore, the system stability. Accuracy of results will be checked against selected analytical solutions when a rupture velocity is specified. Finally, we discuss the spontaneous dynamic crack rupture by considering a simple slip-weakening law. Influence of meshing structures will be analysed before we end up by different illustrations of non-planar rupture evolution in a heterogeneous medium.

## 2 DYNAMIC CRACK PROBLEM

We consider an isotropic, linearly elastic infinite medium containing a surface  $\Gamma$  across which the displacement vector may have an unknown discontinuity while stress conditions are specified on this surface. This so-called crack problem is very different from the kinematic formulation where the displacement discontinuity is specified as introduced in seismology by Haskell (1964). Although we shall restrict our problem to 2-D geometry for illustration, the FV formulation we propose could be straightforwardly extended to 3-D geometry.

Away from the fracture surface  $\Gamma$ , the medium is governed by the following linearized elastodynamic equations,

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{div}} \underline{\sigma} \quad (1)$$

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{div } \vec{u} \, I_2 + \mu [\vec{\nabla} \vec{u} + {}^t(\vec{\nabla} \vec{u})], \quad (2)$$

where the identity matrix is denoted by  $I_2$ , the displacement vector by  $\vec{u}$ , the symmetric stress tensor by  $\underline{\sigma}$ . The spatially varying density is denoted by  $\rho$  and Lamé coefficients by  $\lambda$  and  $\mu$ . The superscript  $t$  denotes the transposition operation. We define the velocity vector  $\vec{v}$  as the time derivative of the displacement vector  $\vec{u}$ . The following velocity–stress first-order hyperbolic system,

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{div}} \underline{\sigma} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} = \lambda \text{div } \vec{v} \, I_2 + \mu [\vec{\nabla} \vec{v} + {}^t(\vec{\nabla} \vec{v})], \quad (4)$$

describes the propagation of elastic waves in the heterogeneous medium (Madariaga 1976; Aki & Richards 1980; Virieux 1986). An initial heterogeneous stress  $\underline{\sigma}(\vec{x}, 0) = \underline{\sigma}_0$  could be defined inside the medium from previous loading histories (Virieux & Madariaga 1982). However, in this paper, we shall only consider uniform pre-stress conditions which can be set to zero.

The crack surface  $\Gamma(\vec{x}, t)$  which may have a complex geometry and which may depend also on time, will be piecewise discretized and a normal vector  $\vec{n}$  is defined at each segment of the crack surface. We shall consider a frictional resistance on the crack surface. More specifically, we deal with an in-plane fracture mode, and we suppose that the contact between the two sides of the fracture is perfect. This means that no opening mechanism happens during the process, thanks to the confining pressure in the Earth crust. Inside the crack surface  $\Gamma$ , the tangential stress, also called the shear stress, is assumed to drop down to its dynamic frictional level using a specific constitutive law we shall discuss later. The shear stress verifies the relationship

$${}^t\vec{\tau} \underline{\sigma}(t, x) \vec{n} = g(t, \Psi) \quad \forall x \in \Gamma, \quad (5)$$

where  $g$  is a function depending on time and a local set of a constitutive law parameters  $\Psi$ . The tangent to the surface is denoted by  $\vec{t}$ . We assume that this function does not depend on the normal stress. We shall assume as well that the function  $g(t)$  is spatially invariant on the crack surface, although the numerical method we develop might handle more complex friction behaviours for other applications.

Because, we allow a displacement discontinuity across the surface  $\Gamma$ , we define limiting values of both the displacement and the velocity vector, respectively as :

$$\vec{u}^\pm(\vec{x}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{u}[\vec{x} \pm \epsilon \vec{n}(\vec{x}), t] \quad (6)$$

$$\vec{v}^\pm(\vec{x}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{v}[\vec{x} \pm \epsilon \vec{n}(\vec{x}), t]. \quad (7)$$

The slip  $\mathcal{U}$  and the slip-rate  $\mathcal{V}$  are, respectively, jumps of the tangential displacement and the tangential velocity vectors across the surface  $\Gamma$ . These quantities are numerically determined. With previous notations, we have the following expressions for the slip and the slip-rate magnitudes,

$$\mathcal{U} = (\vec{u}^+ - \vec{u}^-) \cdot \vec{t} \quad (8)$$

$$\mathcal{V} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = (\vec{v}^+ - \vec{v}^-) \cdot \vec{t}, \quad (9)$$

where the scalar product is denoted by a dot.

The crack surface  $\Gamma(\vec{x}, t)$  expands during the rupture process from its initial configuration  $\Gamma_0 = \Gamma(\vec{x}, 0)$  to the final one  $\Gamma_f = \Gamma(\vec{x}, T_f)$  at the time  $T_f$  when the rupture process stops, while waves are still propagating inside the medium. Whatever the dynamic fracture mechanism is, it depends critically on the accuracy of the elastic field estimation nearby the crack surface. It will be our main concern when considering the numerical implementation of boundary conditions.

## 3 CONSERVATIVE FLUX FORMULATION

In order to solve the elastodynamic equations by a FV method, we transform the system (3)–(4) into a conservative formulation on which we apply FV discretization. We identify the discrete total energy inside the elastic medium and its time variation related to the energy release when the crack rupture occurs. The study of the energy variation allows us to define the appropriate boundary conditions on the crack surface. This is the new feature we would like to stress in our work.

### 3.1 Finite volume equations

Over the elastic domain we consider in this paragraph, the stress tensor  $\underline{\sigma}$  can be split into a trace tensor  $\underline{s} = 1/2 \text{tr} \underline{\sigma} \, I_2$  and a deviatoric tensor  $\underline{d} = \underline{\sigma} - \underline{s}$  (i.e.  $\text{tr} \underline{d} = 0$ ). For a 2-D geometry, we may consider equivalently the two numbers  $T = (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})/2$  and  $T' = (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})/2$  and the shear-stress  $\sigma_{xz}$ . We write the system (3)–(4) into the form

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial (T + T')}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial (T - T')}{\partial z} \quad (11)$$

$$\frac{1}{\lambda + \mu} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (14)$$

which can be written into a pseudo-conservative form

$$\Lambda \vec{W}_t = \text{div } \vec{\mathcal{F}}(\vec{W}), \quad (15)$$

where the subscript  $t$  means the temporal derivative. The vector  $\vec{W} = {}^t(v_x, v_z, T, T', \sigma_{xz})$  has to be estimated. The diagonal matrix

$\Lambda = \text{diag}(\rho, \rho, \frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu})$  contains the material description, while the transformation  $\mathcal{F}$  is a linear function of  $\vec{W}$  given by

$$\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

where

$$\mathcal{F}_1(\vec{W}) = {}^t(T + T', \sigma_{xz}, v_x, v_x, v_z)$$

and

$$\mathcal{F}_2(\vec{W}) = {}^t(\sigma_{xz}, T - T', v_z, -v_z, v_x).$$

This function definition is only for compact notation of the eq. (15). Let us underline that the right-hand side (RHS) of this equation does not include medium properties description. In other words, specific parameters describing heterogeneities are grouped on the left-hand side (LHS) of the eq. (15) which allows a non-ambiguous use of centred space scheme as we will see in following paragraphs.

The elastic medium is divided in triangular cells in such a way that the crack surface coincides with edges of specific cells at any time. By anticipation, we may consider that the crack ruptures on a pre-specified surface related to a mechanically weak zone of the Earth crust. Therefore, the initial meshing of the entire medium could be such that any evolution of the crack surface will match numerical edges of cells, an easy problem compared to new fractures on a fresh material.

The eq. (15) is integrated over each finite control surface (volume in 3-D geometry) or cell  $\mathcal{T}_i$ . Assuming both the solution and the medium's characteristics constant in each cell, we obtain by the Green theorem,

$$\int_{\mathcal{T}_i} \Lambda_i \vec{W}_i = \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\mathcal{F}}(\vec{W}) \vec{n} \, dS, \quad (16)$$

where  $\partial \mathcal{T}_i$  designs the boundary of the cell  $\mathcal{T}_i$ ,  $\Lambda_i$  contains the values of elastic parameters inside the cell  $\mathcal{T}_i$  and  $\vec{n}$  is the unitary outwards normal vector. The eq. (16) is approximated by,

$$\mathcal{A}_i \Lambda_i (\vec{W}_i)_{\mathcal{T}_i} = \sum_{\mathcal{T}_j \in V(\mathcal{T}_i)} \Phi_{ij}, \quad (17)$$

where  $\mathcal{A}_i$  is the surface of the cell  $\mathcal{T}_i$ . The expression  $(\vec{W}_i)_{\mathcal{T}_i}$  is an approximation of  $\vec{W}_i$  inside the cell  $\mathcal{T}_i$ . For each cell  $\mathcal{T}_i$ , the set of neighbouring cells is denoted by  $V(\mathcal{T}_i)$ . The numerical flux integral across the interface  $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$  between  $\mathcal{T}_i$  and  $\mathcal{T}_j$  is denoted by  $\Phi_{ij}$ . The scheme is conservative as the following equality

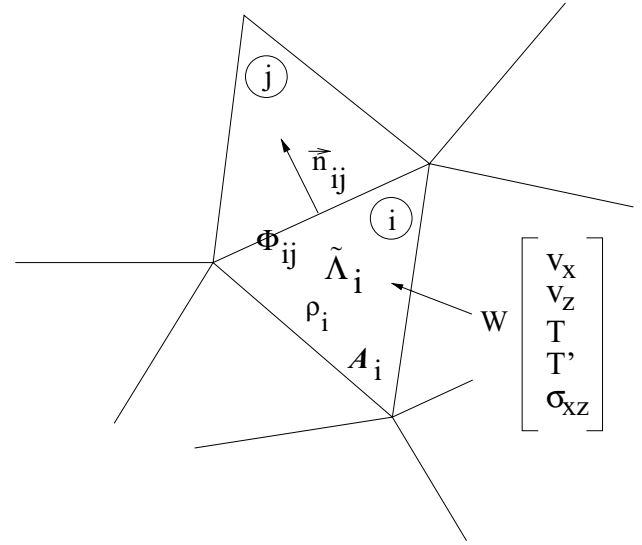
$$\Phi_{ij} + \Phi_{ji} = 0 \quad (18)$$

is verified, thanks to the convention for normal vector orientation for edges of each cell. For cells having connection with the external edges of the domain, one must consider flux integral which may require specific attention as Absorbing conditions as studied by Benjema *et al.* (2006), which will be applied without discussion in this paper focused on the numerical crack boundary implementation.

We use a centred scheme for a numerical approximation of the flux integral between contiguous cells for elements without edges on the crack surface  $\Gamma(\vec{x}, t)$ . We can write the following expression,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_{ij}} \vec{\mathcal{F}}(\vec{W}) \vec{n} \, dS &\simeq \Phi_{ij} \equiv \vec{\mathcal{F}}\left(\frac{W_i + W_j}{2}\right) \int_{\mathcal{T}_{ij}} \vec{n} \, dS \\ &= \frac{\vec{\mathcal{F}}(W_i) + \vec{\mathcal{F}}(W_j)}{2} \vec{n}_{ij}, \end{aligned}$$

where arithmetic means of fields are used in this flux evaluation along the edge between two cells. The edge normal  $\vec{n}_{ij} = \int_{\mathcal{T}_{ij}} \vec{n} \, dS$



**Figure 1.** Two contiguous cells within the mesh.  $\rho_i$  and  $\tilde{\Lambda}_i$  are the local elastic properties of the medium in the cell  $\mathcal{T}_i$ . The unknown  $\vec{W}$  is assumed constant in each cell, and  $\Phi_{ij}$  design the fluxes between  $\mathcal{T}_i$  and  $\mathcal{T}_j$ .

is now isolated from field quantities  $W_i$  and  $W_j$  which may vary spatially and in time. The index  $ij$  specifies the direction from  $\mathcal{T}_i$  to  $\mathcal{T}_j$  when time integration is performed for the  $\mathcal{T}_i$  cell (Fig. 1). These centred numerical fluxes fulfil the conservative property we want to verify when the medium is continuous.

Let us denote  $\vec{\gamma} = {}^t(T, T', \sigma_{xz})$  the stress part of the vector  $\vec{W}$ . Using this notation, the previous flux integral is split into

$$\Phi_{ij} = \Phi(W_i, W_j) = {}^t[\Phi_{\vec{v}}(\gamma_i, \gamma_j), \Phi_{\vec{\gamma}}(v_i, v_j)] \quad (19)$$

with

$$\Phi_{\vec{v}} = {}^t(\Phi_{v_x}, \Phi_{v_z}) \quad \text{and} \quad \Phi_{\vec{\gamma}} = {}^t(\Phi_T, \Phi_{T'}, \Phi_{\sigma_{xz}})$$

given by the following expressions,

$$\Phi_{v_{xij}} = \frac{T_i + T_j + T'_i + T'_j}{2} n_{xij} + \frac{\sigma_{xz_i} + \sigma_{xz_j}}{2} n_{zij} \quad (20)$$

$$\Phi_{v_{zij}} = \frac{\sigma_{xz_i} + \sigma_{xz_j}}{2} n_{xij} + \frac{T_i + T_j - T'_i - T'_j}{2} n_{zij} \quad (21)$$

$$\Phi_{T_{ij}} = \frac{v_{xi} + v_{xj}}{2} n_{xij} + \frac{v_{zi} + v_{zj}}{2} n_{zij} \quad (22)$$

$$\Phi_{T'_{ij}} = \frac{v_{xi} + v_{xj}}{2} n_{xij} - \frac{v_{zi} + v_{zj}}{2} n_{zij} \quad (23)$$

$$\Phi_{\sigma_{xz_{ij}}} = \frac{v_{zi} + v_{zj}}{2} n_{xij} + \frac{v_{xi} + v_{xj}}{2} n_{zij}. \quad (24)$$

For temporal integration, we use a leap-frog scheme where velocity is discretized at half-integer time steps and stress at integer time steps, which gives us the following discrete scheme

$$\rho_i v_i^{n+\frac{1}{2}} = \rho_i v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_i} \sum_{j \in V(i)} \Phi_{\vec{v}}(\gamma_i^n, \gamma_j^n) \quad (25)$$

$$\tilde{\Lambda}_i \gamma_i^{n+1} = \tilde{\Lambda}_i \gamma_i^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_i} \sum_{j \in V(i)} \Phi_{\vec{\gamma}}\left(v_i^{n+\frac{1}{2}}, v_j^{n+\frac{1}{2}}\right) \quad (26)$$

with the discrete matrix  $\tilde{\Lambda}_i = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i}, \frac{1}{\mu_i}, \frac{1}{\mu_i})$ . Replacing the fluxes by their respective expressions, we obtain the following 2-D discrete system of five equations,

$$\rho_i v_i^{n+\frac{1}{2}} = \rho_i v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_i} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} N_{ij} \frac{\gamma_i^n + \gamma_j^n}{2} \quad (27)$$

$$\tilde{\Lambda}_i \gamma_i^{n+1} = \tilde{\Lambda}_i \gamma_i^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_i} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} {}^t N_{ij} \frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} + v_j^{n+\frac{1}{2}}}{2}, \quad (28)$$

with the following discrete geometric matrix  $N_{ij} = \begin{pmatrix} n_{xij} & n_{xij} & n_{zij} \\ n_{zij} & -n_{zij} & n_{xij} \end{pmatrix}$  depending on cell edges. This discrete time-evolution system has a rather low number of arithmetic operations.

A CFL criterion, for which the stability of this explicit time scheme can be proved in the general case of an unstructured mesh, will depend on the smallest triangle of the mesh. In other words, the discrete time increment  $\Delta t$  must be bounded by a value depending on the highest wave velocity and the smallest space path, which is taken for our unstructured mesh as the shortest height among all heights of triangles inside the mesh. A quite attractive feature would be a local time step. For more details on how to estimate this CFL value, we refer to the work of Benjemaa *et al.* (2006) as notations are quite tedious when considering unstructured meshes.

### 3.2 Energy consideration

Let us consider the energy  $E$  of the system defined by

$$E = \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2}_{E_c} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}}_{E_m}, \quad (29)$$

where  $E_c$  is the kinetic energy of the system and  $E_m$  its mechanical energy (see Appendix A for more details). By considering Hooke's law, we may express the mechanical energy with respect to stresses which are quantities specified at crack boundaries:

$$E_m = \int_{\Omega} \frac{1}{2} {}^t \vec{\sigma} C \vec{\sigma} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} {}^t \vec{\gamma} \tilde{\Lambda} \vec{\gamma}. \quad (30)$$

Thus, the total energy in the continuum,

$$E = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2 + \frac{1}{2} {}^t \vec{\gamma} \tilde{\Lambda} \vec{\gamma} \right), \quad (31)$$

is transformed into the discrete total energy,

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{A}_i \left[ \rho_i {}^t (v_i^{n+\frac{1}{2}}) v_i^{n-\frac{1}{2}} + {}^t (\gamma_i^n) \tilde{\Lambda}_i \gamma_i^n \right], \quad (32)$$

expressed at integer time steps  $n$  where the stress is estimated. Once the rupture process has stopped, we have verified that this discrete total energy inside the medium is kept constant, which is a consequence of the joint use of the leap-frog time-scheme and centred numerical fluxes (Fezoui *et al.* 2005), for the time and space discretizations of the conservative flux formulation (15). How numerically the total energy varies in time during the rupture process is described now.

## 4 NUMERICAL BOUNDARY CONDITIONS

Let us now consider the crack surface  $\Gamma$  which coincides with edges of specific cells at any time. Let us remind that solutions could be

discontinuous through these edges. Therefore, for these cells, a specific flux estimation should be performed on those edges belonging to the crack surface, called from now on crack edges. Using the scheme (27)–(28), the discrete total energy time variation is given by

$$\Delta \mathcal{E}^n = \sum_{\partial \mathcal{T}_i \cap \partial \mathcal{T}_j \subset \Gamma} \underbrace{\frac{\Delta t}{2} (\vec{F}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{F}_{ji}^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \vec{n}_{ij}}_{\Delta \mathcal{E}_{ij}^n}, \quad (33)$$

where the summation is over the crack edges (see Appendix B). Each energy variation  $\Delta \mathcal{E}_{ij}^n$  is related to the cell  $\mathcal{T}_i$  towards the cell  $\mathcal{T}_j$ . The local discrete energy rate vector  $\vec{F}$  is given by

$$\vec{F}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} [T_i^{(n+\frac{1}{2})} + T_i'^{(n+\frac{1}{2})}] v_{xj}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{xz_i}^{(n+\frac{1}{2})} v_{zj}^{n+\frac{1}{2}} \\ \sigma_{xz_i}^{(n+\frac{1}{2})} v_{xj}^{n+\frac{1}{2}} + [T_i^{(n+\frac{1}{2})} - T_i'^{(n+\frac{1}{2})}] v_{zj}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

while the normal vector  $\vec{n}_{ij} = \begin{pmatrix} n_{xij} \\ n_{zij} \end{pmatrix}$  is oriented as usual from the cell  $\mathcal{T}_i$  towards the cell  $\mathcal{T}_j$ . The stress estimation at half-integer time steps is obtained through the following time averaging expression

$$\gamma_i^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{\gamma_i^n + \gamma_i^{n+1}}{2}.$$

If we assume continuity of velocity and stress fields through these crack edges, the discrete total energy time variation will be zero.

### 4.1 Local horizontal crack

Without loss of generality, we may consider a horizontal segment of the crack surface with respect to the Cartesian coordinate system. Any other segment orientation could be considered by performing a local coordinate rotation as we shall see. Therefore, the normal vector of this horizontal segment is  $\vec{n}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_{zij} \end{pmatrix}$ , with  $n_{zij} = \pm 1$  depending on which side of the crack line we are. The energy variation is then reduced to the following expression,

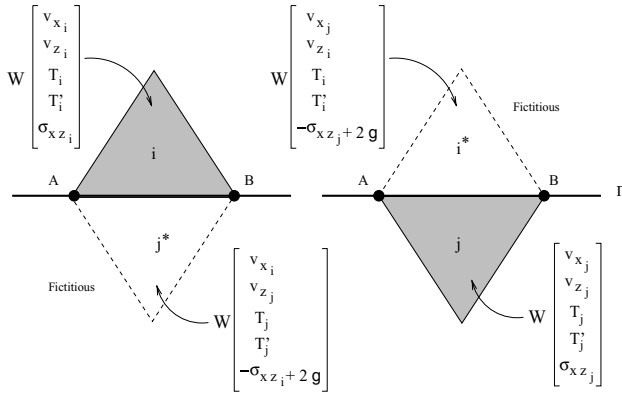
$$\Delta \mathcal{E}^n = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i,j \subset \Gamma} \left\{ \sigma_{xz_i}^{(n+\frac{1}{2})} v_{xj}^{n+\frac{1}{2}} + [T_i^{(n+\frac{1}{2})} - T_i'^{(n+\frac{1}{2})}] v_{zj}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{xz_j}^{(n+\frac{1}{2})} v_{xi}^{n+\frac{1}{2}} + [T_j^{(n+\frac{1}{2})} - T_j'^{(n+\frac{1}{2})}] v_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \right\} n_{zij}. \quad (34)$$

Without any stress boundary condition, this discrete energy should be kept constant. The variation  $\Delta \mathcal{E}^n$  must vanish for every time step  $n$ . For the sake of simplicity, we omit the temporal superscript and write down the energy conservation as

$$\sum_{i,j \subset \Gamma} [\sigma_{xz_i} v_{xj} + (T_i - T_i') v_{zj} + \sigma_{xz_j} v_{xi} + (T_j - T_j') v_{zi}] n_{zij} = 0 \quad (35)$$

for every couple  $(i,j)$  such that  $\partial \mathcal{T}_i \cap \partial \mathcal{T}_j \subset \Gamma$ .

Consider now two adjacent cells  $\mathcal{T}_i$  and  $\mathcal{T}_j$  sharing a common crack edge. Since, we allow discontinuities because of the local rupture, the fluxes integral  $\Phi_{ij}$  and  $\Phi_{ji}$  through the segment  $\mathcal{T}_{ij} = \partial \mathcal{T}_i \cap \partial \mathcal{T}_j \subset \Gamma$  could not be estimated through relations (17)–(21). The centred space scheme has to be modified for handling such field discontinuities and we must check that the eq. (35) will be verified when specific homogeneous boundary conditions are applied. For these reasons, we consider new flux integrals, say  $\Phi_{ij}^*$  instead of  $\Phi_{ij}$  for the cell  $\mathcal{T}_i$  and  $\Phi_{ji}^*$  instead of  $\Phi_{ji}$  for the cell  $\mathcal{T}_j$ . We should define rules how to estimate these new flux integrals  $\Phi_{ij}^*$  and  $\Phi_{ji}^*$  from local variables from cells  $\mathcal{T}_i$  and  $\mathcal{T}_j$ .



**Figure 2.** Two contiguous cells above and below the fault  $\Gamma$ .  $[AB]$  design the same local horizontal crack edge between cells  $\mathcal{T}_i$  and  $\mathcal{T}_j$ . Dashed lines specifies fictitious cells.

Due to the discontinuities we will introduce, the flux integrals  $\Phi_{ij*}$  and  $\Phi_{ji*}$  across the crack does not verify  $\Phi_{ij*} + \Phi_{ji*} = 0$  as for a continuous medium. Nevertheless, the total energy variation must remain equal to zero when specific homogeneous boundary conditions are applied. A simple way consists in verifying the local condition

$$\Delta \mathcal{E}_{ji}^n + \Delta \mathcal{E}_{ij}^n = 0. \quad (36)$$

In other words, the following equality

$$\sigma_{xz_i*} v_{x_j} + (T_i^* - T_i'^*) v_{z_j} + \sigma_{xz_j} v_{x_i} + (T_j - T_j') v_{z_i} - [\sigma_{xz_i} v_{x_j*} + (T_i - T_i') v_{z_j*} + \sigma_{xz_j*} v_{x_i} + (T_j^* - T_j'^*) v_{z_i}] = 0 \quad (37)$$

must be verified at each time  $t$  and for all  $i$  and  $j$  such that  $\partial \mathcal{T}_i \cap \partial \mathcal{T}_j \subset \Gamma$  considering fictitious cells  $\mathcal{T}_{j*}$  and  $\mathcal{T}_{i*}$  (see Fig. 2). The minus sign comes from the orientation of the normal crack vector.

Since we are interested in the in-plane fracture mode with no opening mechanism, the normal velocity component must be continuous, while the tangential velocity component is discontinuous. This leads us to the definition of local variables of the fictitious  $\mathcal{T}_{j*}$  cell by assigning specific values of both  $\mathcal{T}_i$  and  $\mathcal{T}_j$  cells through

$$v_{x_{j*}} = v_{x_i} \quad (38)$$

$$v_{z_{j*}} = v_{z_j} \quad (39)$$

$$T_{j*} = T_j \quad (40)$$

$$T_{j*}' = T_j' \quad (41)$$

$$\sigma_{xz_{j*}} = -\sigma_{xz_i}. \quad (42)$$

Similar equalities must be verified for the fictitious cell  $i^*$  by replacing indexes  $j^*$  by  $i^*$  and  $i$  by  $j$ . Let us also remark that the eqs (40)–(42) are nothing but the continuity of the traction vector through the crack.

This definition enables us to conserve the discrete total energy as we sum up over the crack surface when no boundary conditions are specified through a local conservation over each segment. In order to satisfy the boundary condition (5), we modify the last eq. (42) as,

$$\sigma_{xz_{j*}} = -\sigma_{xz_i} + 2g \quad (43)$$

prescribing the shear stress average value across the crack to  $g$ . The factor 2 comes from the centred scheme. The same equality must be taken for the cell  $i^*$ . Following standard centred scheme, we are now able to estimate the flux  $\Phi_{ij*}$  across  $\mathcal{T}_{ij}$  by,

$$\Phi_{v_{x_{ij*}}} = \frac{T_i + T_j + T_i' + T_j'}{2} n_{x_{ij}} + g n_{z_{ij}} \quad (44)$$

$$\Phi_{v_{z_{ij*}}} = g n_{x_{ij}} + \frac{T_i + T_j - T_i' - T_j'}{2} n_{z_{ij}} \quad (45)$$

$$\Phi_{T_{ij*}} = v_{x_i} n_{x_{ij}} + \frac{v_{z_i} + v_{z_j}}{2} n_{z_{ij}} \quad (46)$$

$$\Phi_{T_{ij*}'} = v_{x_i} n_{x_{ij}} - \frac{v_{z_i} + v_{z_j}}{2} n_{z_{ij}} \quad (47)$$

$$\Phi_{\sigma_{xz_{ij*}}} = \frac{v_{z_i} + v_{z_j}}{2} n_{x_{ij}} + v_{x_i} n_{z_{ij}}. \quad (48)$$

We may proceed similarly for the other flux integral  $\Phi_{ji*}$  by inverting indexes  $i$  and  $j$ . Let us remark that fictitious cells are not specified in the computer code keeping memory management simple. Only related rules are applied for deducing the appropriate variable values when defining the split fluxes  $\Phi_{ij*}$  and  $\Phi_{ji*}$ , as shown above. Unambiguous rules have been elaborated for boundary conditions across an horizontal crack segment.

## 4.2 Local arbitrary oriented crack edge

Let us consider a local crack edge making an angle  $\theta$  with respect to the Cartesian coordinate system  $(x, z)$ . We may define a local Cartesian coordinate system  $(x', z')$  with the axis  $x'$  along the crack direction and express both the stress tensor and the velocity vector in the local Cartesian system, respectively, denoted as  $\bar{\sigma}$  and  $\bar{v}$ , using the transformation matrix  $P_\theta$  between coordinate systems. The following standard relationships could be deduced:

$$\bar{\sigma} = P_\theta^{-1} \sigma P_\theta \quad \text{and} \quad \bar{v} = P_\theta^{-1} v.$$

We may apply the boundary condition (37) on this local crack edge which is now horizontal in this new Cartesian coordinate system. On this crack edge, the tangential shear stress  $\bar{\sigma}_{x'z'}$  is assumed to drop down to its dynamic friction level. More precisely, its flux integral through the local crack edge drops down to the dynamic level, while the cell value is already representative of the elastic medium response. We shall note this crack edge shear stress  $\tau$  for clear distinction with the shear stress value itself inside the cell.

Therefore, any crack shape could be considered as well by performing this local transformation for each individual edge of the complex crack surface: the crack surface is discretized as a subsequent edges at any time, making necessary the knowledge of the crack geometry before rupture initiation. More sophisticated strategies could be developed with adaptative remeshing as the crack surface expands. This important numerical investigation is left to further works.

## 5 SELF-SIMILAR CRACK WITH CONSTANT RUPTURE VELOCITY

For a self-similar planar crack with a bilateral propagation at a constant velocity, Kostrov (1964) has obtained an analytical solution



**Table 1.** Constitutive parameters of different media. Quantities  $V_p$  et  $V_s$  are, respectively, the  $P$  and  $S$  waves and the density is denoted by  $\rho$ . The LVZ values are used only for the last example.

	$V_p(\text{m s}^{-1})$	$V_s(\text{m s}^{-1})$	$\rho(\text{kg m}^{-3})$
Medium	4000	2300	2500
LVZ	2200	1300	1400

for a sub-Rayleigh rupture velocity. In the 2-D geometry, the slip velocity follows the analytical expression,

$$v_x(t, x, 0) = C \operatorname{Re} \left( \frac{t/x}{\sqrt{t^2/x^2 - v_r^{-2}}} \right),$$

where the factor  $C$ , called Kostrov constant, depends on the rupture velocity  $v_r$ . This analytical solution may be used for the validation of the numerical solutions. We have selected a rupture velocity of  $0.5\alpha$  and we consider a Poissonian medium where the ratio between  $P$  and  $S$  velocities is  $\sqrt{3}$ . Medium properties are taken from the first line of Table 1. At a given point of the crack plane, the flux integral value of the shear stress drops abruptly from the pre-stress level to the dynamic frictional stress value, say  $\tau_f$ , when the point ruptures with the prescribed rupture velocity. Stresses are normalized by the stress drop  $\tau_0 - \tau_f$ , where  $\tau_0$  is the initial state of stress which gives a dimensionless stress drop equal to the unity.

Figs 3(a) and (b) show, respectively, the comparison between numerical and analytical solutions of the slip and the shear stress evaluation in four equidistant points placed along the crack plane for six different inclination angles with respect to the horizontal Cartesian axis. The numerical solution for the slip follows the analytic solution very closely whatever is the fault inclination. The slip is exactly equal to zero before the arrival of the rupture front and then increases hyperbolically as predicted by the theoretical study. The shear stress is also well modelled, especially the relaxation induced after the  $S$  wave arrives at the recorded point. For these simulations, we have selected numerical parameters of Table 2 using the discretization M4, where  $h$  denotes, hereafter, the mesh size along the crack.

Short period oscillations in the shear stress are observed due to the discrete stepwise progress of the fracture front. Dissipation terms can be introduced to control these spurious numerical oscillations (Virieux & Madariaga 1982; Knopoff & Ni 2001). We rewrite the system (3)–(4) as follows:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{\sigma} \quad (49)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} I_2 + \mu [\vec{\nabla} \vec{v} + {}^t(\vec{\nabla} \vec{v})] + \eta \{ \lambda \operatorname{div} \dot{\vec{v}} I_2 + \mu [\vec{\nabla} \dot{\vec{v}} + {}^t(\vec{\nabla} \dot{\vec{v}})] \}, \quad (50)$$

where  $\dot{\vec{v}}$  is the time derivative of the velocity vector and  $\eta$  is a damping coefficient to be determined. Due to our method which assumes that unknowns are piecewise-constant in each cell, we cannot add in a simple way a spatial second order derivative to the eq. (49) as usually used. We propose to add another term in the RHS of the eq. (50) which is exactly equivalent to the addition of a Laplacian term, but have the advantage to avoid spatial derivative computations. Fig. 4 shows the comparison between analytical and numerical solutions of the shear stress for the self-similar constant velocity rupture obtained without and with the damping term. The coefficient  $\eta$  is determined numerically and turns out to be  $0.5\Delta t$  for the M4

discretization of Table 2. Applying this artificial damping will be case-dependent because we have to avoid distortions in the build-up of the physical singularity of the shear-stress.

### 5.1 Mesh influence

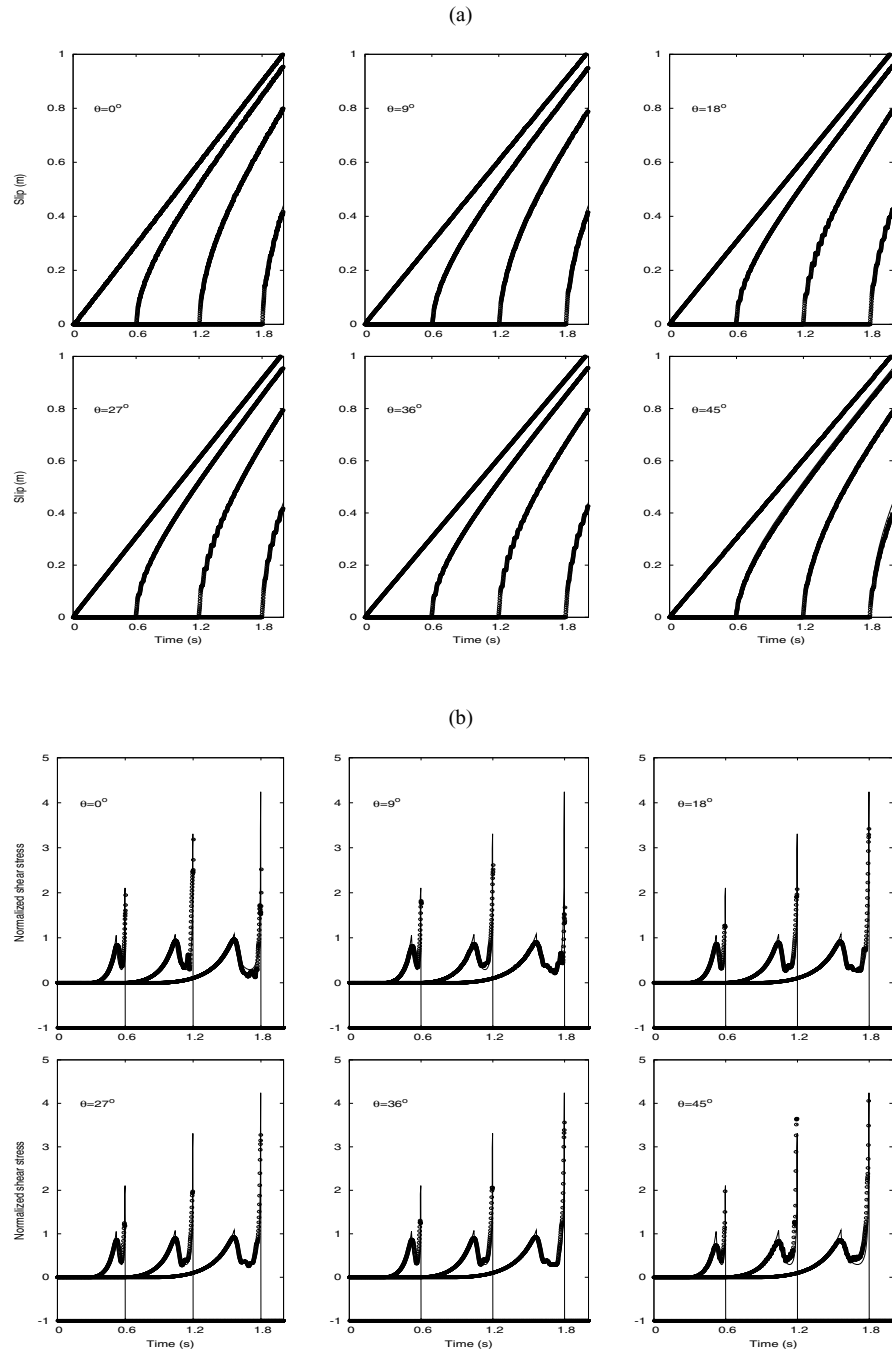
One very interesting feature of the FV formulation is the capability of using simple unstructured triangular meshes. This allows us to describe quite accurately the geometry of the fault surface, especially when the geometry is non-planar. Realistic source geometries will modify quite significantly rupture behaviour as well as slip history over the fault surface (Aochi & Fukuyama 2002; Ando *et al.* 2004). Another advantage of considering unstructured meshes lies in the fact that one can refine the mesh nearby the fault zone in order to increase accuracy in field estimations at the expense of a fine time step which is until now selected globally for the entire medium. The mesh size along the crack  $h$  must be small enough to evaluate both shear stress concentration before the rupture as well as the finite peak associated with the  $S$ -wave motion. Fig. 5 shows the comparison between analytical and numerical solutions computed for different meshes, using medium parameters of Table 1. The different meshes were generated automatically by setting the segment length at external boundaries of the grid as well as on the fault surface. These meshes have the same mesh size at external boundaries and only the mesh size along the crack  $h$  varies, our objective being to find out the dependence of the numerical solutions on the mesh refinement around the rupture surface when neglecting the damping term. Various informations about the different meshes are given in Table 2. One can easily notice that the peak due to the  $S$ -wave travelling ahead the singularity may disappear if the mesh size along the fault is not enough refined. Moreover, one may notice that singular values depend critically on the mesh definition. We may see that it will not affect spontaneous rupture solutions which are now investigated.

## 6 DYNAMIC RUPTURE USING STRESS THRESHOLD CRITERION

An important issue in seismology is the study of the stress conditions on faults before and during earthquakes, and the inference of a constitutive law that characterizes the material response to the applied stress. The friction constitutive relationship represents the governing equation of the failure process, and relates the stress field with fault slip and slip-rate among other physical parameters.

The constitutive relationship is a key element of the dynamic descriptions of the seismic source which is based on models that satisfy the elastodynamic equations (Andrews 1976a,b, 1985; Mikumo & Miyatake 1978; Day 1982; Das & Kostrov 1987; Harris *et al.* 1991). In the framework of fracture mechanics, an earthquake may be considered as a dynamically propagating shear crack that radiates seismic waves. The resulting motion on the fault is strongly related to the shear stress drop. Hence, the slip evolution depends on the failure criterion, the constitutive properties and the initial stress conditions on the fault surface, apart from fault geometry and medium properties. In contrast with the physically consistent dynamic models, kinematic models are widely accepted as a good description of the seismic source (Haskell 1964) prescribing the displacement history of motion *a priori*, without an explicit attempt to investigate the physical causes of the rupture process.

In our model, the constitutive relationship on the fault surface is assumed to be a slip-weakening (SW) friction law (Ida 1972;



**Figure 3.** Comparison of the numerical (circles) and analytical (solid lines) solutions for the self-similar dynamic crack growth problem for (a) fault slip and (b) shear stress flux integral. Each panel correspond to a given crack inclination  $\theta$  with respect the horizontal axis.

Palmer & Rice 1973), which is completely characterized by the yield stress  $\tau_u$ , the dynamic frictional stress  $\tau_f$  and the slip-weakening distance  $\delta_0$  (Fig. 6). Thus the frictional strength  $\tau_c$  is given by such a constitutive law, which may be written as follows:

$$\tau_c = \begin{cases} \tau_u - (\tau_u - \tau_f) \frac{\mathcal{U}}{\delta_0} & 0 \leq \mathcal{U} \leq \delta_0 \\ \tau_f & \mathcal{U} \geq \delta_0 \end{cases} \quad (51)$$

The shear traction fluxes on the fault are bounded above by  $\tau_c$ . We then verify the following jump conditions on the rupture surface

$$\tau \leq \tau_c \quad (52)$$

$$(\tau - \tau_c) \mathcal{V} = 0, \quad (53)$$

which also prevent retrograde fault motion and allow rupture healing (see Day *et al.* 2005, for details about these jump conditions). As a result, a positive fault dislocation always takes place whenever the shear traction  $\tau$  exceeds the fault strength  $\tau_c$ . Otherwise, the fault remains locked. Following eq. (51), rupture begins in a given point if  $\tau$  exceeds the yield stress  $\tau_u$ . The fault strength then drops down to the dynamic level  $\tau_f$  as the slip grows over the critical distance  $\delta_0$ .



**Table 2.** Different meshes and associated numerical quantities.

Mesh	$h$ (m)	$\Delta t (10^{-3} \text{ s})$	Vertex number	Triangles number
M1	100	7	4347	8452
M2	50	3	6037	11820
M3	25	1.5	14425	28536
M4	20	1.2	24681	49012
M5	10	0.6	54309	108180
M6	5	0.4	96573	192692

Fig. 7 displays several phase diagrams for one point located at 6 km from the end of the nucleation zone. For this simulation, we have used the following parameters:  $\tau_u = 1.3$  MPa;  $\tau_f = -3.3$  MPa and  $\delta_0 = 0.4$  m with an initial shear stress  $\tau_0 = 0$  MPa. For the initiation of the unilateral rupture, we impose the rupture in a 2 km long nucleation zone at one extremity of a 12 km fault. In this nucleation zone, the shear stress drops abruptly to the final level  $\tau_f$ . Again, the medium properties are given by the first line of Table 1.

After initiation, the rupture front propagates at subshear velocity. As its length increases, it becomes supershear and finally approaches the  $P$ -wave velocity. Due to the choice of the constitutive friction parameters, the rupture front exhibits the so-called bifurcation (Andrews 1976b): the rupture front jumps from a subshear to a supershear regime. Fig. 7(d) shows clearly that the observational point lies in a region where the rupture front has reached the supershear regime. One can see that the slip-rate peak (around 3 s) arrives before the slip-rate perturbation due to the  $S$  wave (around 3.5 s) travelling behind the rupture front. Figs 7(a) and (b) show the evolution of the shear stress as a function of the slip and slip-rate, respectively. One can note that the linear constitutive law is respected. Finally, Fig. 7(c) shows the slip history according to time. We note that there is no slip before the arrival of rupture front. Slope variations in the slip function around 3.5, 5 s and 5.8 s correspond to the direct  $S$  wave and two back propagating  $P$ - and  $S$ -waves arrest pulses.

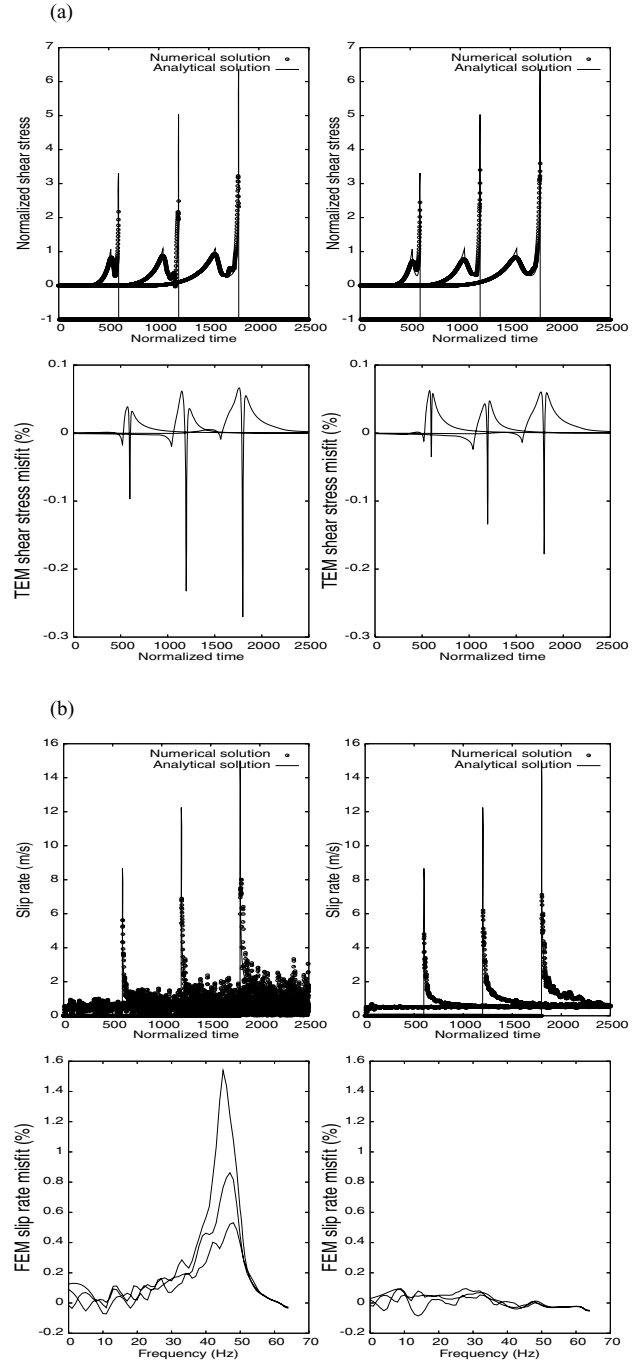
In order to check that our method does not depend on the fault orientation with respect to the Cartesian reference axis when rupture propagates spontaneously, we compare seismograms computed around the same spontaneous rupture case with different source orientations. Fig. 8 shows the superposition of the velocity components in seven points located around the fault, for six different fault orientations. We see a good agreement between all signals. For comparison, velocity components are expressed in the local reference frame ( $x', z'$ ). The constitutive values used for this test case are:  $\tau_u = 1.7$  MPa;  $\tau_f = -2$  MPa and  $\delta_0 = 0.2$  m with an initial shear stress  $\tau_0 = 0$  MPa. The nucleation zone is 1.5 km long and lies on the left extremity of a 6 km fault. It is governed by the following parameters:  $\tau_u = \tau_0 = 0$  MPa;  $\tau_f = -10$  MPa and  $\delta_0 = 0.02$  m.

Fig. 9 shows the superposition of the slip and the slip-rate in the middle point of the spontaneous rupture region, for various fault orientations. Good estimates of the latter are also seen independently of the orientation of the fault. Furthermore we clearly see the  $P$ -stopping phase that abruptly changes the slip around 2 s after initiation (Fig. 9).

Fig. 9(b) shows that the rupture front travels at a supershear regime. This is due to the choice of the constitutive friction parameters (Das & Aki 1977). Only small numerical oscillations are found, suggesting that quite stable solutions have been constructed.

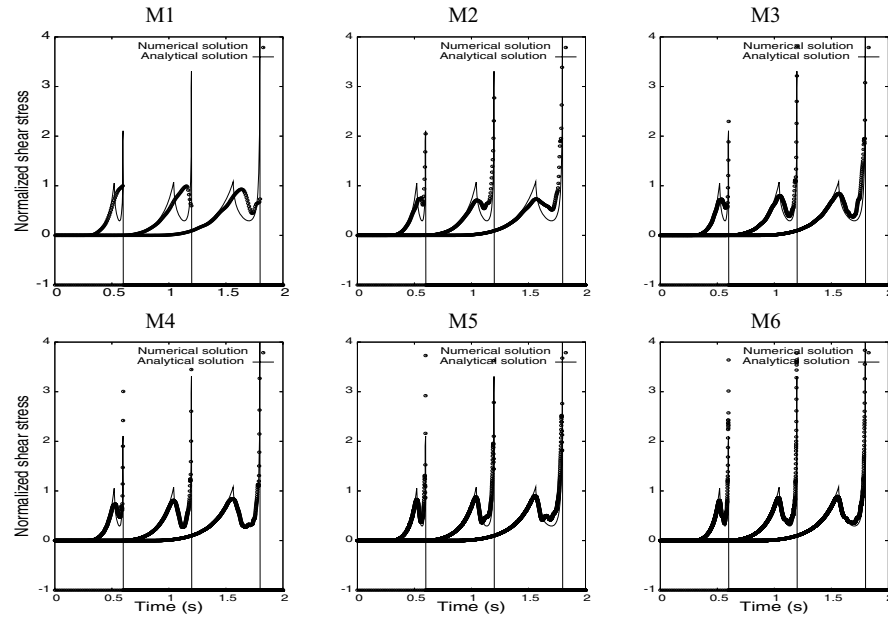
### 6.1 Convergence of the spontaneous crack solution

We study again the influence of the mesh on numerical solutions. An essential requirement (even though not sufficient) for an accurate

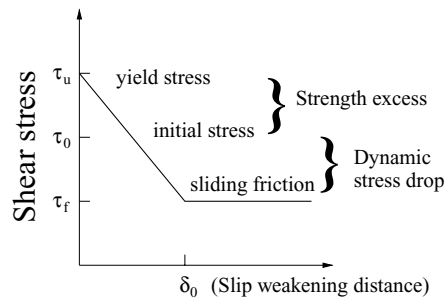


**Figure 4.** Comparison between analytical (solid line) and numerical (circle) solution for the self-similar constant velocity rupture of (a) the shear stress and (b) the slip rate, at four points located on the crack. Left-hand panels are for  $\eta = 0$  (i.e. without damping coefficient), while right-hand panels are for  $\eta = 0.5\Delta t$ . Time Envelope Misfit (TEM) and Frequency Envelope Misfit (FEM) are two misfit criteria for quantitative comparison of seismograms (see Kristekova *et al.* 2006, for details).

numerical method is that numerical solutions become independent of grid size. Since no theoretical solution is available for the spontaneous crack problem, we look for mesh refinements that yield rupture history independent of numerical discretization. During the steady crack propagation, the only physical length in our problem is the size of the fault region lying just behind the rupture front



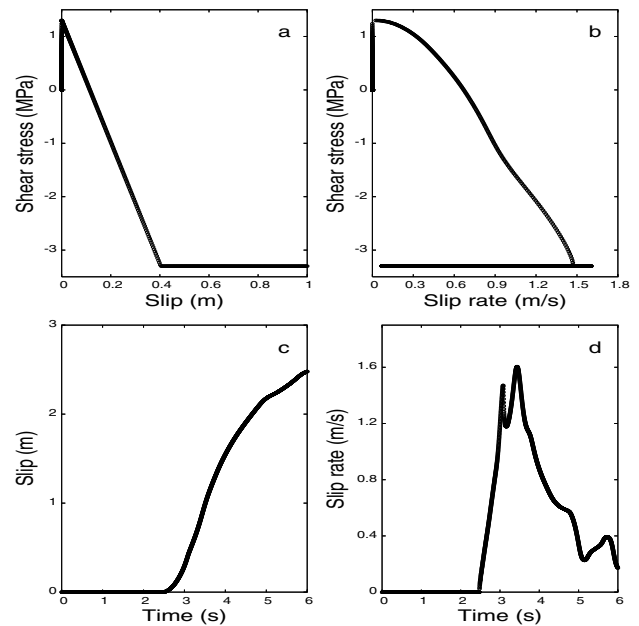
**Figure 5.** Comparison of the numerical (circles) and analytical (solid lines) shear stress solutions for the self-similar dynamic crack growth problem for six different meshes.



**Figure 6.** Slip-weakening friction law. The curve represents the total shear stress as a function of cumulative slip.

where the shear stress has not reached the dynamic friction level. This zone, known as the cohesive zone, is the place in which the breakdown process happens. For this reason, its correct sampling is a fundamental requirement for accurate rupture estimates. In order to yield numerical solutions independent of grid discretization, the number of mesh segments inside the cohesive zone,  $N_c$ , must be kept large enough. This quantity  $N_c$  represents the main numerical parameter controlling the convergence of crack solutions. Of course, the smaller the grid size along the fault  $h$  is, the bigger  $N_c$  is. So we expect to find some minimal value for  $N_c$  that assures numerical convergence.

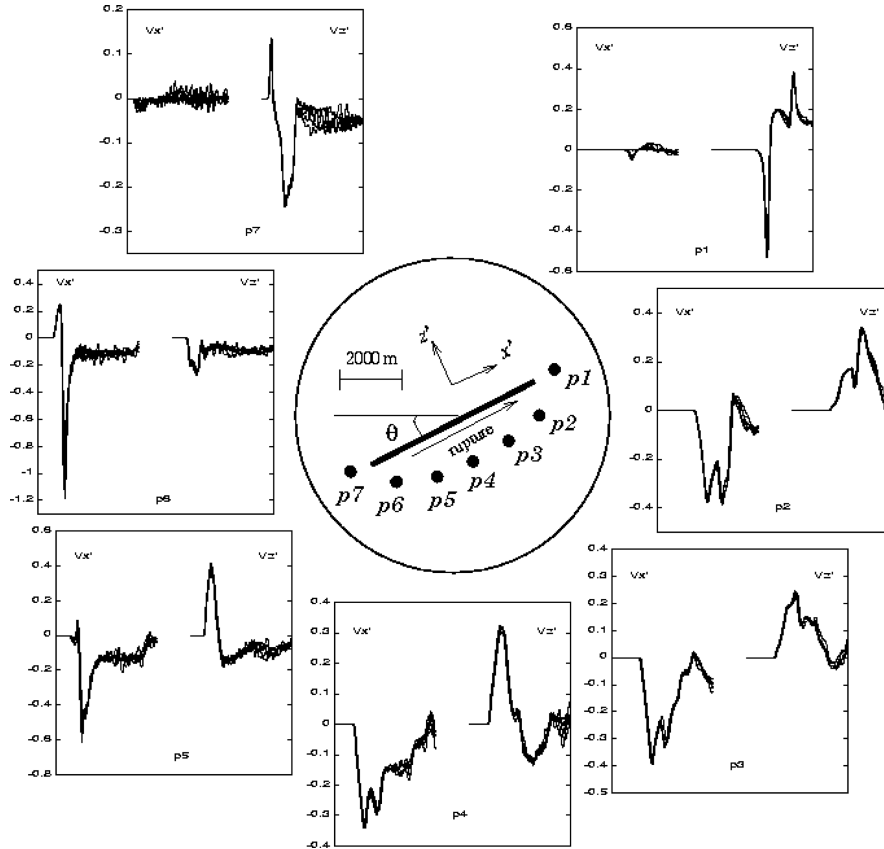
For the spontaneous crack propagation with a slip weakening friction law, the cohesive zone is variable during the rupture and there is no *a priori* estimation of the numerical mesh density for adequate description of this weakening law. Hence, the quantity  $N_c$  we consider in the following represents the average of all quantities  $N_c$  along the spontaneous fault before the crack stops. The constitutive parameters for this simulation are  $\tau_u = 1.4$  MPa;  $\tau_f = -2$  MPa and  $\delta_0 = 0.25$  m with an initial shear stress  $\tau_0 = 0$  MPa. For the initiation of the unilateral rupture, we impose the rupture in a 2 km long nucleation zone at one extremity of a 6 km fault. In this nucleation zone, the shear stress drops abruptly to the final level  $\tau_f$ . Due to



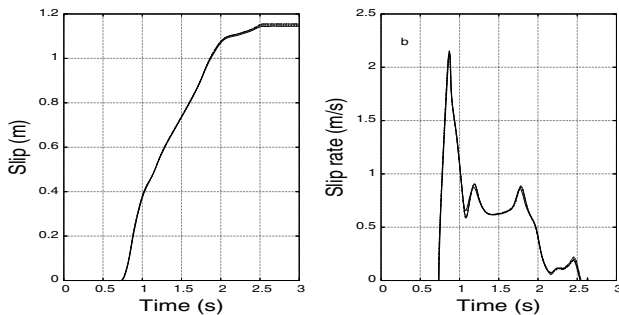
**Figure 7.** Numerical solutions at a fault point located at 6 km from the end of the nucleation zone.

this choice of the constitutive parameters, the fault propagates at a subshear regime. This case is more suitable for the determination of the cohesive zone than the supershear regime for which this process zone is extremely variable.

Fig. 10 shows the superposition of the slip rate on a point located at the middle of the spontaneous fault (left-hand panel) and the fault length (right-hand panel) as function of the time for five different meshes. The solutions are clearly dependent on mesh refinement. One can see that the mesh refinement induces the convergence of the different computed solutions to the finest one. The rupture times



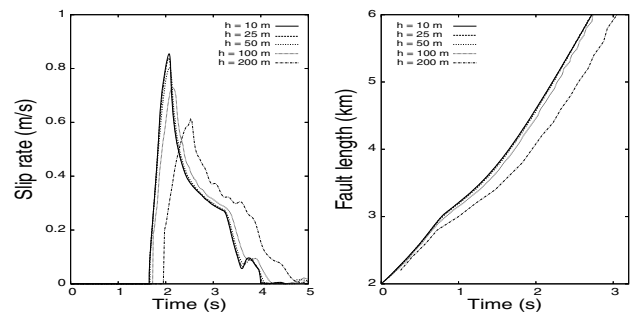
**Figure 8.** Velocity seismograms computed at seven points located around the fault, for six different orientations ( $\theta = 0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ, 36^\circ$  and  $45^\circ$ ).



**Figure 9.** Superposition of the slip (a) and the slip rate (b) computed in the middle point of the spontaneous rupture for six different fault inclination angles ( $\theta = 0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ, 36^\circ$  and  $45^\circ$ ).

converge toward the same value when the mesh size become smaller or equal than 50 m.

Fig. 11 shows the root mean square (rms) of the rupture time difference (in percentage) as a function of the mesh size along the crack  $h$  for the left-hand panel, and as a function of the number of mesh segments inside the cohesive zone  $N_c$  for the right-hand panel. The plotted circles represent the rms difference of rupture times relative to a finest mesh. The rupture time of a point on the fault plane is defined as the time at which the shear stress exceeds the yield stress  $\tau_u$ . We used a numerical solution computed with mesh size  $h = 10$  m as reference solution. The rms differences follow a power law with estimated exponent between 1.8 and 2.1. These results seem in agreement with those found in Day *et al.* (2005).

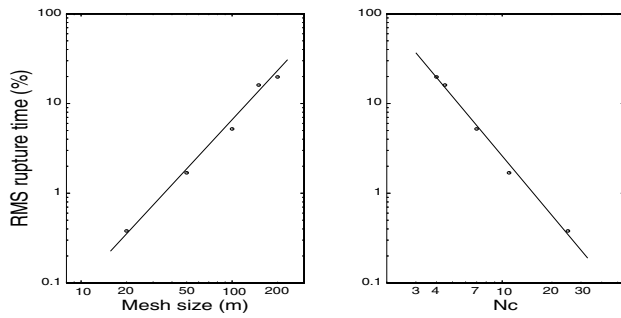


**Figure 10.** Superposition of the slip rate computed in the middle point of the spontaneous rupture (right-hand side) and the fault length (left-hand side) for five different meshes.

Although this study is not yet quantitative since no independent reference solution was considered, these numerical comparisons allow us to estimate the minimal number of mesh segments inside the cohesive zone,  $N_c$ , which should be greater than eight for making the solution rather independent of the mesh definition.

## 6.2 Comparison with a finite difference method

As we pointed out in the previous section, the convergence of solutions when the mesh is refined is not sufficient to guarantee the accuracy of the numerical result when no theoretical solution exists (Day & Ely 2002). The comparison of different numerical methods can be helpful for this kind of problems. In what follows, we



**Figure 11.** Difference in time of rupture as a function of the mesh size (left-hand side) and the number of mesh segments inside the cohesive zone (right-hand side), relative to a reference solution.

proceed to a comparison of the FV method we propose with a finite difference method introduced and validated by Cruz-Atienza (2006) and Cruz-Atienza *et al.* (2006) using a complete different numerical implementation of boundary conditions based on a strong treatment inside elements neighbouring the crack surface. This comparison validates the boundary conditions of our FV approach since both methods give quite similar solutions.

Let us consider a dynamic crack problem with the slip weakening law (51). We select again medium properties using the first line of Table 1 and numerical parameters using the line M5 of Table 2. Since the crack propagation velocity depends on the material strength  $\tau_u$ , we tested two cases for which only  $\tau_u$  is changed. For the first case, we choose  $\tau_u = 1.4$  MPa: the rupture propagates in a subshear regime. For the second case  $\tau_u = 0.5$  MPa: the rupture propagates in a supershear regime. The other constitutive parameters are the same for both cases and are the following:  $\tau_f = -2$  MPa and  $\delta_0 = 0.25$  m. For rupture initiation, we impose a 2 km nucleation zone in which the shear stress drops abruptly to a final level  $\tau_f$ .

Figs 12(a) and (b) show, respectively, a comparison between the numerical solutions of the shear stress and the slip rate for the two test cases. The three observation points are located at  $L/2$ ,  $2L/3$  and  $3L/4$ , where  $L = 4000$  m is the final spontaneous fault length (out of the nucleation zone). Results were obtained with  $h = 10$  m for the two methods. Solutions are fairly similar for both rupture cases. Only small differences on the peak of the slip rate can be noted mainly in the subshear case. In the supershear case, both the time history and the amplitude of the seismograms are almost identical.

The rupture velocity is a critical parameter that strongly depends on the local properties of the solution. The crack tip evolves similarly for both numerical methods. Fig. 13 provides a quite impressive agreement between the FV method and the FD method for the dynamic crack tip position as a function of the time. We are confident not only in the convergence of our numerical scheme but also in the precision of the numerical solution we have obtained.

## 7 NON-PLANAR FAULT GEOMETRY

Triangular unstructured meshes used along this study allow us to consider both planar and non-planar fault geometries. Moreover, all variables of the system are computed in the same control volume while the rupture geometry is defined by pre-selected edges which may break or not. Let us underline that this discretization of the fault will depend on the mesh we use but the fault line will be sampled by edges and not by staircases which allows far more flexibility than the one proposed by FD methods. The FV scheme is quite adapted for both heterogeneous media and complex structures of faulting.

As an illustration of this flexibility, a complex test case dealing with a spontaneous rupture crossing a heterogeneity is now presented.

### 7.1 Complex fault geometry in heterogeneous media

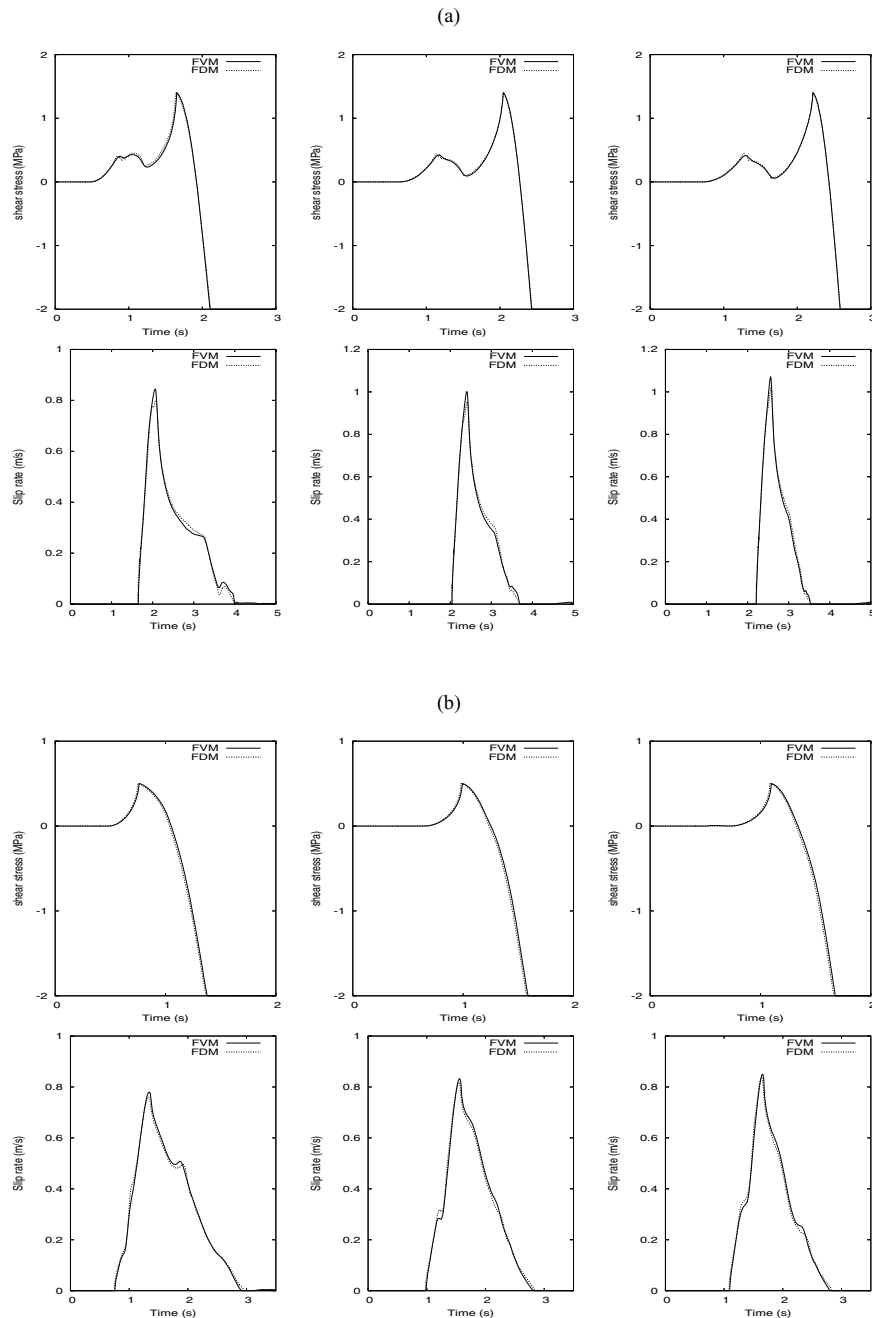
Let us consider a non-planar fault propagating in a heterogeneous medium. The rupture crosses a low velocity zone LVZ during its evolution. Table 1 shows the different elastic properties of both media. The fault is governed by the SW friction law (51).

Fig. 14 shows a snapshot of the horizontal velocity  $v_x$  at 4 s after initiation. The rupture is 14.3 km long with a 1 km long nucleation zone located at the left edge of the fault, while the LVZ (circular dashed line) has a diameter of 4 km. The various constitutive parameters used for this simulation are:  $\tau_u = 1.5$  MPa;  $\tau_f = -3.3$  MPa and  $\delta_0 = 0.05$  m with an initial shear stress  $\tau_0 = 0$  MPa. The nucleation zone is governed by the following parameters:  $\tau_u = \tau_0 = 0$  MPa;  $\tau_f = -10$  MPa and  $\delta_0 = 0.02$  m.

The unilateral rupture propagates rightwards at supershear velocity. The crack tip velocity reaches the  $S$ -wave velocity and approaches the  $P$  wave one. Results are similar to those presented by Cruz-Atienza & Virieux (2004), showing that the LVZ has important consequences. We have found that the crack tip velocity abruptly decreases inside such a zone, due to the direct relationship between the SW friction law and the elastic properties of the medium. We have also found an important increase of the slip and slip rate functions inside this zone. Furthermore, we can clearly identify in Fig. 14 the reflected  $P$  and  $S$  waves on the interface between the two media, especially inside the LVZ where back-propagating trapped waves are generated.

## 8 CONCLUSION

A new flexible FV method to simulate the spontaneous growth of an in-plane shear crack has been presented. Thanks to an appropriate change of variables, all parameters of the medium are grouped on the left hand side of the elastodynamic equations and integration can be made even if the medium contains heterogeneities. The study of a suitable discrete expression of energy allows us to define the appropriate fracture boundary conditions to be imposed on the crack surface. The shear stress flux integral is set instead of the shear stress itself when applying boundary conditions. This makes the fracture to have no thickness, so both crack blocs only interact through the fracture traction vector. Consequently, different elastic properties at both sides of the fracture can be properly considered (e.g. bi-materials cracks). Numerically, this corresponds to the weak treatment of boundary conditions (set on fluxes), instead of a strong treatment of boundary conditions (set on elastic fields values). Spurious high frequency content in elastic fields at the vicinity of the crack tip is reduced as we reduce the mesh size near the fault surface, and the solution has a smoother behaviour as appropriate dissipation terms are added. Unstructured triangular meshes allow us to do this without important supplementary memory requirement. The comparison between numerical and analytical solutions for the self-similar constant velocity case, as well as comparisons made with an independent finite difference method (Cruz-Atienza & Virieux 2004) for different spontaneous rupture cases, revealed a very good agreement between the solutions, validating thus our approach for any kind of rupture geometry. The study of the influence of the mesh refinement on the numerical solutions shows that solutions are accurate enough if at least eight fault segments are found to be inside the cohesive zone. Finally, we illustrate the robustness of our method



**Figure 12.** Comparison of the shear stress and the slip rate solutions obtained by our finite volume scheme and the finite difference method (Cruz-Atienza & Virieux 2004), in three points located on the crack surface. The rupture propagates at (a) subshear regime and (b) supershear regime.

by performing a simulation for a non-planar fault geometry embedded in a heterogeneous medium. Results are in agreement with our expectations about the presence of low velocity zones during the dynamic rupture propagation.

The FV method we propose seems to be a good alternative to the widely used finite difference and finite element methods, due to its geometrical flexibility and low computational cost. It is proved that this method is a second order space accuracy over a structured mesh (see Remaki 2000, for instance). The use of discontinuous Galerkin methods (DG), which can be thought as a FV methods of higher order, will improve the solution accuracy and should be investigated in future works.

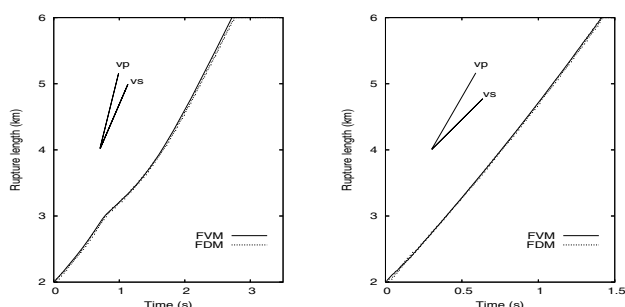
Our study has been restricted to 2-D space domain, although the extension to 3-D space domain of the numerical rupture model does not require supplementary theoretical considerations. Only the computer task is more intensive.

## ACKNOWLEDGMENTS

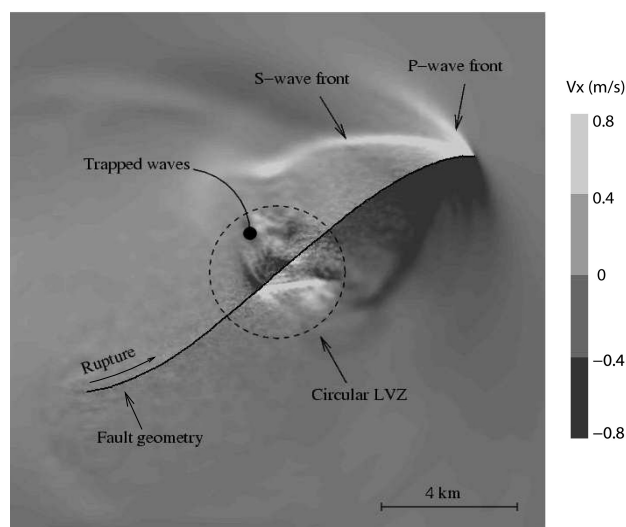
We thank S. Lanteri for useful discussions and helpful comments during the work.

The authors are grateful to J.P. Ampuero for his constructive remarks that helped to improve the content of the paper and his careful checking of the accuracy of the solution. Raul Madariaga





**Figure 13.** Rupture length function of the time for two cases. The left-hand panel shows that the crack propagates at a subshear regime, while the right-hand panel shows that the crack propagates at a supershear regime.



**Figure 14.** Snapshot of the horizontal particle velocity  $v_x$  four seconds after rupture initiation. The non-planar fault grows through a circular low velocity zone (LVZ). Spontaneous rupture propagating rightwards is governed by the slip weakening friction law (eq. 51).

is thanked as an associate editor for positive remarks. We acknowledge partial support of scientific program QSHA PROJET ANR-05-CATT-011. This paper is a contribution of the UMR Géosciences Azur 6526.

## REFERENCES

- Aki, K. & Richards, P., 1980. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*, W.H. Freeman & Co, San Francisco.
- Ando, R., Tada, T. & Yamashita, T., 2004. Dynamic evolution of a fault system through interactions between fault segments, *J. geophys. Res.*, **109**, doi:10.1029/2003JB002665.
- Andrews, D., 1976a. Rupture propagation with finite stress in antiplane strain, *J. geophys. Res.*, **81**, 3575–3582.
- Andrews, D., 1976b. Rupture velocity of plain strain shear cracks, *J. geophys. Res.*, **81**, 5679–5687.
- Andrews, D., 1985. Dynamic plane-strain shear rupture with a slip weakening friction law calculated by a boundary integral method, *Bull. seism. Soc. Am.*, **75**, 1–12.
- Aochi, H. & Fukuyama, E., 2002. Three-dimensional nonplanar simulation of the 1992 landers earthquake, *J. geophys. Res.*, **107**, 4.1–4.12.
- Bécache, E. & Duong, T.H., 1994. A space-time variational formulation for the boundary integral equation in a 2D elastic crack problem, *J. geophys. Res.*, **28**, 141–176.

- Benjemaa, M., Piperno, S. & Glinsky-Olivier, N., 2006. *Étude de stabilité d'un schéma volumes finis pour les équations de l'élastodynamique en maillages non structurés*, INRIA Sophia Antipolis. RR-5817, France.
- Capdeville, Y., Chaljub, E., Vilotte, J.-P. & Montagner, J.-P., 2003. Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in realistic 3D global Earth models, *Geophys. J. Int.*, **152**, 34–68.
- Chaljub, E., Capdeville, Y. & Vilotte, J.-P., 2003. Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere: a parallel spectral element approximation on non-conforming grids, *J. Comput. Phys.*, **187**, 457–491.
- Cohen, G. & Fauqueux, S., 2001. 2D elastic modelling with efficient mixed finite elements, in *Extended Abstracts*, Eur. Ass. Expl. Geophys.
- Cruz-Atienza, V.M., 2006. Rupture dynamique des failles non-planaires en différences finies, *PhD thesis*, University of Nice — Sophia Antipolis, France.
- Cruz-Atienza, V.M. & Virieux, J., 2004. Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach, *Geophys. J. Int.*, **158**, 939–954.
- Cruz-Atienza, V.M., Virieux, J. & Aochi, H., 2007. 3d finite-difference dynamic-rupture modelling along non-planar faults, *Geophysics*, in press.
- Das, S. & Aki, K., 1977. A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **50**, 643–668.
- Das, S. & Kostrov, B., 1987. On the numerical boundary integral equation method for three-dimension dynamic shear crack problems, *J. Appl. Mech.*, **54**, 99–104.
- Day, S., 1977. Finite element analysis of seismic scattering problems, *PhD Dissertation*, **54**, 99–104.
- Day, S., 1982. Three-dimensional simulation of spontaneous rupture: the effect of nonuniform prestress, *Bull. seism. Soc. Am.*, **72**, 1881–1902.
- Day, S. & Ely, G.P., 2002. Effect of a shallow weak zone on fault rupture: Numerical simulation of scale-model experiments, *Bull. seism. Soc. Am.*, **92**, 3022–3041.
- Day, S., Dalgue, L.A., Lapusta, N. & Liu, Y., 2005. Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture, *J. geophys. Res.*, **110**, B12307.
- Dormy, E. & Tarantola, A., 1995. Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method, *J. geophys. Res.*, **100**, 2123–2133.
- Festa, A. & Vilotte, J.-P., 2005. Spectral element simulations of dynamic rupture along kinked faults, *EGU Meeting*, pp. SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU05-A-05122.
- Fezoui, L., Lanteri, S., Lohrengel, S. & Piperno, S., 2005. Convergence and stability of a discontinuous galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous maxwell equations on unstructured meshes, *ESAIM*, **39**, doi: 10.1051/m2an:2005049.
- Harris, R., Archuleta, R. & Day, S., 1991. Fault steps and the dynamic rupture process: 2-D numerical simulations of a spontaneously propagating shear fracture, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 893–896.
- Haskell, N., 1964. Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults, *Bull. seism. Soc. Am.*, **54**, 1811–1842.
- Huang, H. & Costanzo, F., 2004. On the use of space-time finite elements in the solution of elasto-dynamic fracture problems, *Int. J. Fract.*, **127**, 119–146.
- Ida, Y., 1972. Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and griffith's specific surface energy, *J. geophys. Res.*, **77**, 3796–3805.
- Kame, N. & Yamashita, T., 1999. Simulation of the spontaneous growth of a dynamic crack without constraints on the crack tip path, *Geophys. J. Int.*, **139**, 345–358.
- Käser, M. & Iske, A., 2005. Ader schemes on adaptive triangular meshes for scalar conservation laws, *J. Comput. Phys.*, **205**, 486–508.
- Knopoff, L. & Ni, X., 2001. Numerical instability at the edge of a dynamic fracture, *Geophys. J. Int.*, **147**, F1–F6.
- Komatitsch, D. & Vilotte, J.-P., 1998. The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2-D and 3-D geological structures, *Bull. seism. Soc. Am.*, **88**, 368–392.

- Kostrov, B., 1964. Selfsimilar problems of propagation of shear cracks, *PMM*, **28**, 889–898.
- Kristekova, M., Kristek, J., Moczo, P. & Day, S., 2006. Misfit criteria for quantitative comparison of seismograms, *Bull. seism. Soc. Am.*, **96**(5), 1836–1850.
- LeVeque, R., 2002. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, UK.
- Madariaga, R., 1976. Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. seism. Soc. Am.*, **66**, 639–666.
- Madariaga, R., 2005. Seismic energy radiation from dynamic faulting, *EGU Meeting*, pp. SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU05-A-05775.
- Madariaga, R., Olsen, K. & Archuleta, R., 1998. Modeling dynamic rupture in a 3d earthquake fault model, *Bull. seism. Soc. Am.*, **88**, 1182–1197.
- Mikumo, T. & Miyatake, T., 1978. Dynamical rupture process on a three-dimensional fault with non-uniform frictions and near-field seismic waves, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **54**, 417–438.
- Moës, N. & Belytschko, T., 2002. Extended finite element method for cohesive crack growth, *Eng. Fract. Mech.*, **69**, 813–833.
- Olsen, K.B., Madariaga, R. & Archuleta, R., 1997. Three-dimensional dynamic simulation of the 1992 landers earthquake, *Science*, **278**, 834–838.
- Palmer, A. & Rice, J., 1973. The growth of slip surfaces in the progressive failure of overconsolidated clay slopes, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A332**, 537.
- Piperno, S., Remaki, M. & Fezoui, L., 2002. A non-diffusive finite volume scheme for the 3d maxwell equations on unstructured meshes, *SIAM J. Numer. Anal.*, **39**, 2089–2108.
- Remaki, M., 2000. A new finite volume scheme for solving maxwell system, *COMPEL*, **19**(3), 913–932.
- Tada, T. & Madariaga, R., 2001. Dynamic modelling of the flat 2-D crack by a semi-analytical BIEM scheme, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **50**, 227–251.
- Tada, T. & Yamashita, T., 1977. Non-hypersingular boundary integral equations for two-dimensional non-planar crack analysis, *Geophys. J. Int.*, **130**, 269–282.
- Virieux, J., 1986. P-SV wave propagation in heterogeneous media, velocity–stress method, *Geophysics*, **51**, 889–901.
- Virieux, J. & Madariaga, R., 1982. Dynamic faulting studied by a finite difference method, *Bull. seism. Soc. Am.*, **72**, 345–369.
- Zhang, J., 2005. Elastic wave modeling in fractured media with an explicit approach, *Geophysics*, **70**, 75–85.

## APPENDIX A:

We shall express the mechanical energy with respect to the stress components  $\vec{\gamma}$ . Because the stress tensor is symmetric, it is somehow easier to write it down in a vectorial form as

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix}$$

and it is straightforward to check the following equality

$$\vec{\sigma} = \underline{M} \vec{\gamma}, \quad (\text{A1})$$

where

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We need to introduce as well the deformation tensor

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

where

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

and

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Because the  $\underline{\varepsilon}$  is also symmetric, we can write it down in vectorial form as

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

For an elastic medium, the generalized Hooke's law links deformation and stress through the linear relationship

$$\vec{\varepsilon} = \underline{C} \vec{\sigma} \quad (\text{A2})$$

with

$$\underline{C} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{\lambda + 2\mu}{4(\lambda + \mu)} & -\frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)} & 0 \\ -\frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)} & \frac{\lambda + 2\mu}{4(\lambda + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore, the mechanical energy defined as  $E_m = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}$  should be expressed with deformation or stress only. Because we consider a crack problem, we express the mechanical energy with stress components. By eqs (A1) and (A2), we find

$$\begin{aligned} E_m &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{\sigma} \underline{C} \vec{\sigma} \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} {}^t \vec{\gamma} \tilde{\Lambda} \vec{\gamma} \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda + \mu} T^2 + \frac{1}{\mu} T'^2 + \frac{1}{\mu} \sigma_{xz}^2, \end{aligned}$$

where the matrix  $\tilde{\Lambda}$  stands for  $\underline{M} \underline{C} \underline{M}$  (as  $\underline{M}$  is symmetric).

## APPENDIX B:

The discrete total energy inside the cell  $\mathcal{T}_i$  at time  $n$ , expressed as

$$\mathcal{E}_i^n = \frac{1}{2} \mathcal{A}_i \left( \rho_i {}^t (v_i^{n+\frac{1}{2}}) v_i^{n-\frac{1}{2}} + {}^t (\gamma_i^n) \tilde{\Lambda}_i \gamma_i^n \right), \quad (\text{B1})$$

could vary in time when we apply boundary conditions. The variation of this total energy between times  $n$  and  $n + 1$  is

$$\begin{aligned} 2 \Delta \mathcal{E}_i^n &= 2 (\mathcal{E}_i^{n+1} - \mathcal{E}_i^n) \\ &= \mathcal{A}_i \rho_i {}^t \left( v_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \left( v_i^{n+\frac{3}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \mathcal{A}_i {}^t (\gamma_i^{n+1} + \gamma_i^n) \tilde{\Lambda}_i (\gamma_i^{n+1} - \gamma_i^n) \end{aligned}$$

thanks to the symmetry of the matrix  $\tilde{\Lambda}_i$ . From eqs (27) to (28), we may deduce

$$\begin{aligned} \frac{2 \Delta \mathcal{E}_i^n}{\Delta t} &= \sum_{j \in V(i)} {}^t \left( v_i^{n+\frac{1}{2}} \right) N_{ij} \left[ \gamma_i^{(n+\frac{1}{2})} + \gamma_j^{(n+\frac{1}{2})} \right] \\ &\quad + {}^t \left[ \gamma_i^{(n+\frac{1}{2})} \right] N_{ij} \left( v_i^{n+\frac{1}{2}} + v_j^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Normal vectors inside a cell should verify the following consistent relationship,

$$\int_{\partial \mathcal{T}_i} 1.N \, dS = \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\nabla} 1 \, dx \, dz = 0 \implies \sum_{j \in V(i)} N_{ij} = 0. \quad (\text{B3})$$

Thus the local discrete energy variation is simplified into the expression,

$$\frac{2 \Delta \mathcal{E}_i^n}{\Delta t} = \sum_{j \in V(i)} {}^t(v_i^{n+\frac{1}{2}}) N_{ij} \gamma_j^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t[\gamma_i^{(n+\frac{1}{2})}] {}^t N_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{B4})$$

and allows us to estimate the total discrete energy variation over cells by the following expression,

$$\begin{aligned} 2 \Delta \mathcal{E}^n &= 2 (\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n) \\ &= \Delta t \sum_i \sum_{j \in V(i)} {}^t(v_i^{n+\frac{1}{2}}) N_{ij} \gamma_j^{(n+\frac{1}{2})} + {}^t[\gamma_i^{(n+\frac{1}{2})}] {}^t N_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \Delta t \sum_{\text{interfaces}}^{\text{internal}} \left\{ {}^t(v_i^{n+\frac{1}{2}}) N_{ij} \gamma_j^{(n+\frac{1}{2})} + {}^t[\gamma_i^{(n+\frac{1}{2})}] {}^t N_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ {}^t(v_j^{n+\frac{1}{2}}) N_{ji} \gamma_i^{(n+\frac{1}{2})} + {}^t[\gamma_j^{(n+\frac{1}{2})}] {}^t N_{ji} v_i^{n+\frac{1}{2}} \Big\} \\ &+ \Delta t \sum_{\text{interfaces}}^{\text{external}} \left\{ {}^t(v_i^{n+\frac{1}{2}}) N_{ij} \gamma_j^{(n+\frac{1}{2})} + {}^t[\gamma_i^{(n+\frac{1}{2})}] {}^t N_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Since, we have this conventional identity  $N_{ji} = -N_{ij}$  and since the velocity vector is discontinuous across crack surface  $\Gamma$ , we may deduce the time variation of the total discrete energy as

$$\mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i,j \in \Gamma} \left\{ {}^t(v_i^{n+\frac{1}{2}}) N_{ij} \gamma_j^{(n+\frac{1}{2})} + {}^t[\gamma_i^{(n+\frac{1}{2})}] {}^t N_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}} \right\} \quad (\text{B5})$$

relating to the elastic energy release into the medium along the crack edge.





### 4.2 Résultats 3D

Dans cette section, nous examinons le cas d’une rupture spontanée évoluant suivant la loi SWF décrite précédemment. Nous avons choisi deux cas tests afin de valider notre approche. Le premier est issu du benchmark SCEC (Southern California Earthquake Center) dans sa troisième version en 2004 [80]. Dans ce cas test, la faille évolue dans un plan horizontal. Une pré-contrainte est imposée dans une zone de nucléation afin de démarrer le processus de rupture. Nous comparons nos résultats numériques avec ceux obtenus par une méthode différences finies développée par S. Day [56]. Cette dernière a été à son tour validée par comparaison avec une formulation spectrale d’une méthode intégrale de frontière introduite par G. Perrin [126] pour le problème antiplan en 2D, et étendue au cas tridimensionnel par P. Geubelle [77].

Le deuxième cas test correspond à une faille non plane (c’est-à-dire évoluant suivant une géométrie non plane). Une zone de nucléation est imposée au centre de la faille afin d’initier la rupture. Ce problème a été posé et résolu numériquement par Victor-Manuel Cruz-Atienza afin de valider son schéma DF pour une géométrie non plane de la faille [51]. Nous validons nos résultats en les comparant avec des résultats obtenus par une méthode intégrale de frontière développée par H. Aochi [13].

Les pages qui suivent constituent un article en cours de préparation en vue d’être soumis à “Journal of Geophysical Research”. Les premières pages reprennent l’étude faite dans le chapitre 3, avec des formulations spécifiques au schéma volumes finis en trois dimensions d’espace.



# 3D Dynamic rupture simulations by a finite volume method

## Abstract

Dynamic rupture of a 3D spontaneous crack of arbitrary shape is investigated using a finite volume (FV) approach. The full domain is decomposed in tetrahedra while the surface on which the rupture is supposed to take place is discretized with triangles which are faces of tetrahedra. Because of this meshing strategy, any shape of the rupture surface could be designed and is performed once before simulations start. First of all, the elastodynamic equations are described into a pseudo-conservative form for easy application of the FV discretisation. Explicit boundary conditions are given using criteria based on the conservation of discrete energy through the crack surface. Using a stress-threshold criterion, these conditions specify fluxes through those triangles which have suffered rupture. On these broken surfaces, stress follows a linear slip-weakening law although other friction laws can be implemented. Numerical solutions on a planar fault are achieved for the problem 3 of the SCEC community dynamic-rupture benchmark exercise (Harris et al., 2004) and compared with those provided by a finite difference (FD) technique (Day et al., 2005). Another benchmark problem is also tackled involving a nonplanar curved fault (Cruz-Atienza et al., 2007). Solutions for this difficult exercise are compared with those computed with a boundary integral equation (BIE) method (Aochi et al., 2000). In both benchmarks, comparisons show that rupture fronts are well modelled with a slight delay in time especially along the antiplane direction related to the low-order interpolation of the FV approach which require further mesh refinement or a higher-order interpolation strategy as for discontinuous Galerkin (DG) approach. Slip velocity and shear stress amplitudes are well modeled as well as stopping phases and stress overshoots. We expect this method, which is well adapted for multi-processor parallel computing, to be competitive with others for solving large scale dynamic ruptures scenarios of seismic sources in the near future.

**Key words** : Numerical methods, Friction law, Dynamic rupture, Finite volume approach, Boundary conditions.

## 1 Introduction

Understanding the physics of the rupture process requires accurate methods able to take into account the geometry of the ruptured surface as well as realistic friction laws on this surface. Recent formulations have been proposed for modelling the dynamic shear crack rupture when considering the complexity of earthquake mechanisms embedded in heterogeneous crustal structure (Kame & Yamashita, 1999; Cruz-Atienza & Virieux, 2004; Huang & Costanzo, 2004; Ando et al., 2004). Almost all results have been obtained with boundary integral methods (Das & Aki, 1977; Andrews, 1985; Bécache & Duong, 1994; Tada & Yamashita, 1977; Tada & Madariaga, 2001) which are highly adapted and accurate to solve problems with complex fault geometries. Un-

fortunately, these methods are very expensive since they require the computation of a spatio-temporal convolution proportional to the square of the grid elements number at each time step. Moreover, the analytic Green function involved in the convolution is only relevant for homogeneous medium. Finite element methods (Day, 1977; Aagaard et al., 2001; Cohen & Fauqueux, 2001; Oglesby & Archuleta, 2003), especially spectral formulations (Komatitsch & Vilotte, 1998; Capdeville et al., 2003; Chaljub et al., 2003) are quite accurate for handling spontaneous propagation while considering complex crack structure (Festa & Vilotte, 2005), but remain expensive in CPU memory. Finally, finite difference methods (Madariaga, 1976; Virieux & Madariaga, 1982; Day, 1982; Andrews, 1976, 1999; Day et al., 2005; L. & S., 2007) are accurate enough but limited to simple fault geometry. Recently, Cruz-Atienza et al. (2007) have developed a new approach called the finite difference fault element (FDfE) to overcome such limitations due to the cartesian grid discretization.

In Benjemaa et al. (2007), we have proposed an approach based on a finite volume (FV) formulation applied to bidimensional shear rupture problems. We propose in this paper to extend this approach to the 3D space for the spontaneous crack growth problem. The paper is organized as follows. In the first section, we introduce the elastodynamic system as well as the theoretical formulation of the boundary conditions on the fault surface. The second section is dedicated to the validation of the model. We study two different test cases: a planar fault which is compared to FD solutions obtained by Day et al. (2005) and a nonplanar fault for which our solution is compared with that computed by Cruz-Atienza et al. (2007) using a BIE method (Aochi et al., 2000). The good agreement between the results confirm the robustness of our model.

## 2 Elastodynamic equations

In this section, the FV formulation of a fracture problem in a linearly elastic infinite medium is presented. Considering a surface  $\Gamma$  across which the displacement vector may have an unknown discontinuity, we shall specify the appropriate stress conditions on this surface in order to follow some prescribed friction law. In our case, and throughout all the paper, we have considered a linear slip weakening friction (SWF) law.

### 2.1 Governing equations

Inside an infinite domain  $\Omega$ , but away from the fracture surface  $\Gamma$ , the medium is governed by the following velocity-stress linearized equations,

$$\rho \partial_t \vec{v} = \overrightarrow{\text{div}} \underline{\sigma} \quad (1)$$

$$\partial_t \underline{\sigma} = \lambda \text{div } \vec{v} \mathbb{I}_3 + \mu \left( \vec{\nabla} \vec{v} + \left( \vec{\nabla} \vec{v} \right)^t \right), \quad (2)$$

where  $\mathbb{I}_3$  denotes the identity matrix,  $\vec{v}$  the velocity vector and  $\underline{\sigma}$  the symmetric stress tensor. The spatially varying density is denoted by  $\rho$  and the Lamé coefficients by  $\lambda$

and  $\mu$ . The subscript  $t$  denotes the time derivative while the superscript  $t$  means the transposition operation.

This system describes the elastic waves propagation in a heterogeneous medium (Madariaga, 1976; Aki & Richards, 1980; Virieux, 1986). The initial conditions are given by

$$\vec{v}(0, \vec{x}) = \vec{0} \quad (3)$$

$$\vec{x} \in \Omega$$

$$\underline{\sigma}(0, \vec{x}) = \underline{\sigma}_0, \quad (4)$$

where  $\underline{\sigma}_0$  could be defined inside the medium from previous loading histories (Virieux & Madariaga, 1982).

## 2.2 Crack boundary conditions

The crack surface  $\Gamma$ , which may have a complex geometry and which may also depend on time, will be piecewise discretized and a (continuous) normal vector  $\vec{n}$  is defined at each face of the crack surface (see Fig.7 for instance). We suppose a linearly elastic response of the entire medium except over the infinitely thin sliding surface  $\Gamma$  where deformations and stresses are related through a friction law. In other words, the tangential stress to the crack surface  $\Gamma$ , also called the shear stress, is assumed to drop down to the dynamic frictional level using a specific constitutive law we shall discuss later.

Let us first introduce some useful notations. Let  $\vec{X}$  and  $\vec{n}$  be two vectors. We define the normal and the tangential parts of  $\vec{X}$  by respect to  $\vec{n}$  (i.e. in the base  $(\vec{n}, \vec{n}^\perp)$ ) by

$$\vec{X}_N = \vec{n}^t \vec{X} \vec{n} \quad (5)$$

and

$$\begin{aligned} \vec{X}_T &= \vec{X} - \vec{X}_N \\ &= \vec{X} - \vec{n}^t \vec{X} \vec{n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Because we allow the velocity to be discontinuous across the surface  $\Gamma$ , we define limiting values of the velocity vector as :

$$\vec{v}^\pm(t, \vec{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{v}(t, \vec{x} \pm \epsilon \vec{n}(\vec{x})). \quad (7)$$

The slip velocity vector  $\vec{V}$  is defined as the tangential velocity discontinuity across the surface  $\Gamma$ ,

$$\vec{V} := \llbracket \vec{v}_T \rrbracket = \vec{v}_T^+ - \vec{v}_T^-. \quad (8)$$

We then define the slip magnitude at time  $t$  as follows

$$U(t) = \int_0^t \|\vec{V}(s, \vec{x})\| ds. \quad (9)$$

Using these definitions, we now formulate the jump conditions on the crack surface as

$$\tau_c - \|\vec{T}_T\| \geq 0 \quad (10)$$

$$\tau_c \vec{V} - \vec{T}_T \parallel \vec{V} = \vec{0}, \quad (11)$$

where  $\vec{T}_T$  is the tangential component of the traction vector  $\vec{T} := \underline{\sigma} \vec{n}$  and  $\tau_c$  denotes the frictional strength, which evolves as a function of the fault normal stress  $\sigma_N = \vec{n}^t \underline{\sigma} \vec{n}$  and the frictional coefficient  $\mu$

$$\tau_c = -\sigma_N \mu, \quad (12)$$

The friction coefficient  $\mu$  is here assumed to follow a linear slip weakening law given by

$$\mu(U) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d) \left(1 - \frac{U}{\delta_0}\right) H\left(1 - \frac{U}{\delta_0}\right). \quad (13)$$

In this equation,  $\mu_s$  and  $\mu_d$  are respectively the static and the dynamic friction coefficients,  $\delta_0$  is the critical slip weakening distance (Ida, 1972; Palmer & Rice, 1973), and  $H$  is the Heaviside function.

Further explanations about the jump conditions (10)-(11) can be found in Andrews (1999) and Day et al. (2005).

### 3 Finite volume method

Following the strategy used in Benjemaa et al. (2007) for the bidimensional case, we transform the system (1)-(2) into a pseudo-conservative formulation to which we apply FV discretisation. Due to the symmetry of the stress tensor, one can easily split it into the sum of a trace tensor  $\underline{s}$  and a deviatoric tensor  $\underline{d}$ , where

$$\underline{s} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \mathbb{I}_3 \quad (14)$$

and

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \frac{1}{3}(-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \frac{1}{3}(-\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\sigma_{zz}) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

We then define the stress vector  $\vec{\sigma}$  as follows

$$\vec{\sigma} = (\omega, \omega', \omega'', \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^t, \quad (16)$$

where the quantities  $\omega$ ,  $\omega'$  and  $\omega''$  derive directly from the trace and the deviatoric tensor,

$$\omega = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (17)$$

$$\omega' = \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \quad (18)$$

$$\omega'' = \frac{1}{3}(-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}). \quad (19)$$

The system (1)-(2) can be now written in a pseudo-conservative form

$$\rho \partial_t \vec{v} = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} (\partial_\alpha \mathbb{M}_\alpha) \vec{\sigma} \quad (20)$$

$$\Lambda \partial_t \vec{\sigma} = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} (\partial_\alpha \mathbb{N}_\alpha) \vec{v}, \quad (21)$$

where  $\Lambda$  is a diagonal matrix containing the material description,

$$\Lambda = \text{diag} \left( \frac{3}{3\lambda + 2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \right), \quad (22)$$

and the matrices  $\mathbb{M}_\alpha$  and  $\mathbb{N}_\alpha$  with  $\alpha \in \{x, y, z\}$  are given by

$$\mathbb{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbb{M}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbb{M}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbb{N}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbb{N}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

and

$$\mathbb{N}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Let us underline that the right hand side (RHS) of the equations (20)-(21) does not depend on the medium properties description. This new set of variables allows a non-ambiguous space integration, even when the medium contains heterogeneities.



### 3.1 Domain discretisation and finite volume scheme

The elastic medium  $\Omega$  is discretized into tetrahedral finite volumes, called cells, in such a way that the crack surface  $\Gamma$  coincides with faces of specific cells at any time. This is quite realistic as one may consider that the crack usually ruptures on a pre-specified mechanically weak zone surface of the earth crust. Therefore, the initial meshing of the entire medium could be such that any evolution of the crack surface will match numerical faces of cells.

The finite volume method supposes that the unknown variables are constant in each cell. Integrating the conservative form (20)-(21) over a cell  $\mathcal{T}_i$  and applying the divergence theorem, we obtain

$$\int_{\mathcal{T}_i} \rho \partial_t \vec{v} = \int_{\partial \mathcal{T}_i} \left( \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} (\mathbb{M}_\alpha \vec{n}_\alpha) \vec{\sigma} \right) dS \quad (29)$$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \Lambda \partial_t \vec{\sigma} = \int_{\partial \mathcal{T}_i} \left( \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} (\mathbb{N}_\alpha \vec{n}_\alpha) \vec{v} \right) dS, \quad (30)$$

where  $\partial \mathcal{T}_i$  represents the boundary of the cell  $\mathcal{T}_i$  and  $\vec{n}$  is the unitary outwards normal vector to  $\mathcal{T}_i$ . Assuming both the solution  $\vec{v}$  and  $\vec{\sigma}$  and the medium characteristic  $\rho$ ,  $\lambda$  and  $\mu$  constant in each cell  $\mathcal{T}_i$ , system (29)-(30) can be approximated by

$$V_{\mathcal{T}_i} \rho_{\mathcal{T}_i} (\partial_t \vec{v})_{\mathcal{T}_i} = \sum_{\mathcal{T}_k \in V(\mathcal{T}_i)} \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( (\mathbb{M}_\alpha \vec{n}_{\alpha_{ik}}) \vec{\sigma}|_{\mathcal{T}_{ik}} \right) dS \quad (31)$$

$$V_{\mathcal{T}_i} \Lambda_{\mathcal{T}_i} (\partial_t \vec{\sigma})_{\mathcal{T}_i} = \sum_{\mathcal{T}_k \in V(\mathcal{T}_i)} \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \int_{\mathcal{T}_{ik}} \left( (\mathbb{N}_\alpha \vec{n}_{\alpha_{ik}}) \vec{v}|_{\mathcal{T}_{ik}} \right) dS, \quad (32)$$

where  $V_{\mathcal{T}_i}$  is the volume of the cell  $\mathcal{T}_i$ ,  $V(\mathcal{T}_i)$  is the set of neighboring cells of  $\mathcal{T}_i$  (i.e. cells that share a common face with  $\mathcal{T}_i$ ),  $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$  is the interface between  $\mathcal{T}_i$  and  $\mathcal{T}_k$ ,  $\vec{n}_{ik}$  is the unitary normal vector to  $\mathcal{T}_{ik}$  oriented from  $\mathcal{T}_i$  to  $\mathcal{T}_k$ , and  $\vec{\sigma}|_{\mathcal{T}_{ik}}$  and  $\vec{v}|_{\mathcal{T}_{ik}}$  denote respectively the restriction of  $\vec{\sigma}$  and  $\vec{v}$  on the surface  $\mathcal{T}_{ik}$ . For convenience, we shall use from now the index  $i$  to refer to the cell  $\mathcal{T}_i$ .

To approximate the integral quantities in (31)-(32), we use a centered scheme. In other words, we make the following approximations

$$\vec{\sigma}|_{\mathcal{T}_{ik}} \simeq \frac{\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k}{2} \quad (33)$$

$$\vec{v}|_{\mathcal{T}_{ik}} \simeq \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_k}{2}. \quad (34)$$

Using these approximations and the fact that we have assumed that  $\vec{\sigma}_i$  and  $\vec{v}_i$  are constant in  $\mathcal{T}_i$ , we can remove the quantities  $\vec{\sigma}|_{\mathcal{T}_{ik}}$  and  $\vec{v}|_{\mathcal{T}_{ik}}$  from the integral. On the other hand, if we denote the area of  $\mathcal{T}_{ik}$  by  $S_{ik}$ , one can easily check the following identity

$$\int_{\mathcal{T}_{ik}} \vec{n}_{ik} dS = S_{ik} \vec{n}_{ik}. \quad (35)$$

Hence, we can rewrite the system (31)-(32) as

$$V_i \rho_i (\partial_t \vec{v})_i = \sum_{k \in V(i)} \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} S_{ik} (\mathbb{M}_\alpha \vec{n}_{\alpha ik}) \frac{\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k}{2} \quad (36)$$

$$V_i \Lambda_i (\partial_t \vec{\sigma})_i = \sum_{k \in V(i)} \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} S_{ik} (\mathbb{N}_\alpha \vec{n}_{\alpha ik}) \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_k}{2}, \quad (37)$$

or similarly,

$$V_i \rho_i (\partial_t \vec{v})_i = \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k}{2} \quad (38)$$

$$V_i \Lambda_i (\partial_t \vec{\sigma})_i = \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{Q}_{ik} \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_k}{2}, \quad (39)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ik} &= \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \mathbb{M}_\alpha \vec{n}_{\alpha ik} \\ &= \begin{pmatrix} n_{xik} & n_{xik} & 0 & n_{yik} & n_{z ik} & 0 \\ n_{yik} & 0 & n_{yik} & n_{xik} & 0 & n_{z ik} \\ n_{z ik} & -n_{z ik} & -n_{z ik} & 0 & n_{xik} & n_{yik} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (40)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{ik} &= \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \mathbb{N}_\alpha \vec{n}_{\alpha ik} \\ &= \begin{pmatrix} n_{xik} & n_{yik} & n_{z ik} \\ 2n_{xik} & -n_{yik} & -n_{z ik} \\ -n_{xik} & 2n_{yik} & -n_{z ik} \\ n_{yik} & n_{xik} & 0 \\ n_{z ik} & 0 & n_{xik} \\ 0 & n_{z ik} & n_{yik} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

For temporal integration, we use a leap-frog scheme where velocity is discretized at half-integer time steps and stress at integer time steps,

$$(\partial_t \vec{v})_i \simeq \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (42)$$

$$(\partial_t \vec{\sigma})_i \simeq \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t}. \quad (43)$$

The space-time discretized system can therefore be written as

$$\rho_i \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \rho_i \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \quad (44)$$

$$\Lambda_i \vec{\sigma}_i^{n+1} = \Lambda_i \vec{\sigma}_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{Q}_{ik} \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2}. \quad (45)$$

## 4 Energy consideration

Equations (44)-(45) are available everywhere inside the medium  $\Omega$  except over the fault surface  $\Gamma$ . Indeed, boundary conditions (10)-(11) must be verified through  $\Gamma$ . For this purpose, we propose to identify the appropriate quantities that should be taken over  $\Gamma$  by studying the energy of the system (44)-(45). Once this energy is established, we define fictitious cells above and below the fault surface that enforce the energy variation to be zero when no tractions are specified on  $\Gamma$ . Then we use the conditions (10)-(11) to complete the flux expressions when considering a tangential traction on the fault surface.

Let first notice that the system (44)-(45) is not symmetric, in the sense that

$$\mathbb{Q}_{ik} \neq \mathbb{P}_{ik}^t. \quad (46)$$

This is due to the variable transformation introduced in (17)-(19). We recall that these transformations were made in order to group all the medium characteristics on the left hand side of the equation (21).

It is far easier to deal with symmetric systems when considering energy computation, since the energy of a partial differential equations is equivalent to a Lyapunov function (i.e. symmetric positive definite quadratic form) for the ordinary differential equations. In our case, we can obtain a symmetric system for (44)-(45) by multiplying equation (45) by the symmetric positive definite matrix  $\mathbb{S}$  given by

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

It is easy to check in this case that

$$\mathbb{S} \mathbb{Q}_{ik} = \mathbb{P}_{ik}^t. \quad (48)$$

If we denote  $\Lambda_i = \mathbb{S} \Lambda_i$ , then the system (44)-(45) is equivalent to

$$\rho_i \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \rho_i \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{P}_{ik}^t \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} \quad (49)$$

$$\Lambda_i \vec{\sigma}_i^{n+1} = \Lambda_i \vec{\sigma}_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \mathbb{P}_{ik}^t \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2}. \quad (50)$$

We now define the discrete energy of the system (49)-(50) by

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_i V_i \left( \rho_i \left( \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{\sigma}_i^n \Lambda_i \vec{\sigma}_i^n \right). \quad (51)$$

The discrete energy time variation is given by

$$\begin{aligned}\Delta E^n &:= E^{n+1} - E^n \\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{i,k \in \Gamma} S_{ik} \left( \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathbb{P}_{ik}^t \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right),\end{aligned}\quad (52)$$

where the stress estimation at half-integer time steps is obtained through the following averaged expression

$$\vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} = \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_i^{n+1}}{2}.\quad (53)$$

The proof can be found in Benjemaa et al. (2007) (appendix B).

If we set

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2}\quad (54)$$

and

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{P}_{ik}^t \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2},\quad (55)$$

one can also easily check that the energy time variation is reduced to the following expression

$$\Delta E^n = \Delta t \sum_{i,k \in \Gamma} S_{ik} \left( \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left( \mathcal{F}_{ik}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right) + \left( \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \right).\quad (56)$$

It is not clear at this stage whether  $\Delta E^n$  is equal to zero or not. In fact,  $\Delta E^n$  must at least be less or equal to zero in order to insure the stability of the elastodynamic system.

Since the sum in the expression (56) is only concerned by cells with interfaces belonging to the fault surface  $\Gamma$ , it is obvious that the flux expressions (54) and (55) have to be modified. How these expressions should be changed is what we are going to discuss now.

Equation (54) (resp. (55)) stipulates that the stress flux through an arbitrary interface  $\mathcal{T}_{ik}$  is based on a centered scheme of the stress (resp. the velocity) values above and below this interface. This can no longer be true if the face  $\mathcal{T}_{ik}$  belong to  $\Gamma$  since the fault is a surface where discontinuities may occur. For this reason, we rewrite the equations (54) and (55) in the following form

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} (\mathbb{A}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \mathbb{B}_{ik} \vec{\sigma}_k^n)\quad (57)$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik}^t \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{D}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}})\quad (58)$$

where the matrices  $\mathbb{A}_{ik}$ ,  $\mathbb{B}_{ik}$ ,  $\mathbb{C}_{ik}$  and  $\mathbb{D}_{ik}$  are to be determined.

If we substitute the fluxes  $\mathcal{F}_{ik}^n$  and  $\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}}$  by their expressions (57)-(58) in equation (56), we obtain

$$\begin{aligned} \Delta E^n = \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{i,k / \\ \mathcal{T}_{ik} \subset \Gamma}} S_{ik} & \left[ \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{A}_{ik} + \mathbb{C}_{ik}^t) \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \left( \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (-\mathbb{B}_{ik} + \mathbb{D}_{ik}^t) \vec{\sigma}_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right. \\ & \left. - \left( \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{A}_{ik} + \mathbb{C}_{ik}^t) \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} - \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (-\mathbb{B}_{ik} + \mathbb{D}_{ik}^t) \vec{\sigma}_k^{[n+\frac{1}{2}]} \right], \end{aligned} \quad (59)$$

where the minus sign comes from the fact that

$$\vec{n}_{ki} = -\vec{n}_{ik}. \quad (60)$$

$\Delta E^n$  is then equal to zero if the following equalities hold

$$\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}^t = 0 \quad (61)$$

and

$$\mathbb{B}_{ij} - \mathbb{D}_{ij}^t = 0. \quad (62)$$

Besides, it is easy to check that

$$\mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_{[ik]} = \underline{\sigma}_{[ik]} \vec{n}_{ik}, \quad (63)$$

where the bracket subscript designs the mean value of the variables,

$$\gamma_{[ik]} = \frac{\gamma_i + \gamma_k}{2}, \quad \gamma = \vec{\sigma}, \underline{\sigma} \quad (64)$$

The left hand side of equation (63) is the stress flux through the interface  $\mathcal{T}_{ik}$ , while the right hand side is the traction vector on this surface. Thus, the equality (63) simply shows that the flux  $\mathcal{F}_{ik}$  is nothing but the traction vector on the surface  $\mathcal{T}_{ik}$ .  $\mathcal{F}_{ik}^n$  can be written as the sum of its normal and tangential components,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ik}^n &= \mathcal{F}_{ik_N}^n + \mathcal{F}_{ik_T}^n \\ &= \left( \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_{[ik]}^n \right) \vec{n}_{ik} + \mathcal{F}_{ik_T}^n. \end{aligned} \quad (65)$$

When no tangential traction is applied on the surface  $\mathcal{T}_{ik}$  (i.e.  $\mathcal{F}_{ik_T} = 0$ ), the stress flux  $\mathcal{F}_{ik}$  is reduced to its normal component, and the energy must be conserved. Equating the expressions (57) and (65), one can deduce

$$\mathbb{A}_{ik} = (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t - \mathbb{I}_3) \mathbb{P}_{ik} \quad (66)$$

and

$$\mathbb{B}_{ik} = \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}, \quad (67)$$

and via equations (61) and (62), we obtain

$$\mathbb{C}_{ik} = \mathbb{P}_{ik}^t (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t - \mathbb{I}_3) \quad (68)$$

and

$$\mathbb{D}_{ik} = \mathbb{P}_{ik}^t \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t. \quad (69)$$

Now, considering the spontaneous shear crack problem implies that the tangential traction is not equal to zero. Hence, we have to modify equation (65) to take into account such a traction. We shall rewrite equation (65) as

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \left( \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \vec{\sigma}_{[ik]}^n \right) \vec{n}_{ik} + \vec{T}_{ik_T}^n, \quad (70)$$

where  $\vec{T}_{ik_T}^n$  denotes the tangential component of the traction vector applied to the surface  $\mathcal{T}_{ik}$  at time  $n \Delta t$  which should verify the boundary conditions (10)-(11).

Firstly assuming the inequality (10) is strict, i.e.

$$\tau_c - \|\vec{T}_{ik_T}\| > 0, \quad (71)$$

and taking the modulus of equation (11), one can deduce that

$$\vec{V}_{ik} = \vec{0}. \quad (72)$$

Or, using equation (44), we have

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{k \in V(i) \\ \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \not\subset \Gamma}} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} + \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{k \in V(i) \\ \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \subset \Gamma}} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2}. \quad (73)$$

Let  $\vec{R}_i^n$  be the quantity which involves no flux contribution from the fault surface

$$\vec{R}_i^n = \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{k \in V(i) \\ \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k \not\subset \Gamma}} S_{ik} \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2}. \quad (74)$$

Equation (73) can then be written as

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_i^n + \frac{\Delta t S_{ik}}{\rho_i V_i} \mathcal{F}_{ik}^n, \quad (75)$$

where  $\mathcal{T}_i$  and  $\mathcal{T}_k$  design two opposite cells sharing an interface  $\mathcal{T}_{ik} \subset \Gamma$ .

The slip velocity vector  $\vec{V}_{ik}$  is then given by

$$\begin{aligned} \vec{V}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} &:= \vec{v}_{i_T}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_{k_T}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \vec{V}_{ik}^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_{i_T}^n - \vec{R}_{k_T}^n + \Delta t S_{ik} \left( \frac{1}{\rho_i V_i} + \frac{1}{\rho_k V_k} \right) \vec{T}_{ik_T}^n. \end{aligned} \quad (76)$$

Let us define the following vector

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \frac{\left( -\vec{V}_{ik}^{n-\frac{1}{2}} - \vec{R}_{i_T}^n + \vec{R}_{k_T}^n \right) \rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)}. \quad (77)$$

$\vec{T}$  is in fact a vector which, when introduced into (76), would enforce the continuity of the tangential velocity.

We are now able to define the traction vector as

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \begin{cases} \vec{T}_{ik_T}^n & \text{if } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| < \tau_c \\ \frac{\vec{T}_{ik_T}^n}{\|\vec{T}_{ik_T}^n\|} \tau_c & \text{if } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| \geq \tau_c. \end{cases} \quad (78)$$

Finally, using equations (57), (58), (66), (67), (68), (69) and (70), we conclude that the fluxes through an interface  $\mathcal{I}_{ik} \subset \Gamma$  are given by

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik} \frac{\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_k^n}{2} + \vec{T}_{ik_T}^n \quad (79)$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{P}_{ik}^t \left( \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right), \quad (80)$$

where  $\vec{T}_{ik_T}^n$  is given by (78).

## 5 Model validation

For the validation of our method, we propose in the following section several comparisons between our numerical solutions and solutions obtained by other approaches : the dynamic fault model (DFM) developed by Day et al. (2005) and the boundary integral equation (BIE) method developed by Aochi et al. (2000). Since these methods are highly independant from each other, and particularly from our finite volume method, this exercise constitute the best way to validate the numerical solutions when no analytical solutions are available.

### 5.1 Test problem 1

We consider a planar fault embedded in a linearly elastic homogeneous medium. The formulation and parameters of this test case correspond to Version 3 of the Southern California Earthquake Center (SCEC) benchmark problem developed for the second SCEC spontaneous rupture code validation workshop of 2004 (Harris et al., 2004). The characteristics of the medium are given in table 1.

Table 1:

$v_s (m s^{-1})$	$v_p (m s^{-1})$	$\rho (kg m^{-3})$
3464	6000	2670

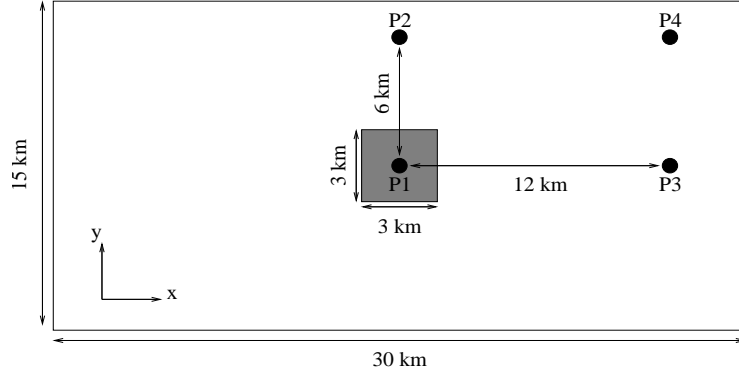


Figure 1: *Fault model for testing dynamic rupture simulation for the SCEC problem. The gray square in the center is the nucleation zone. The black circles are the receivers at which we compare time histories of the shear stress and the slip velocity.*

The fault geometry of this problem is detailed in Fig.1. We take the fault plane to be the  $xy$  plane and the rupture is allowed within a fault area of 30 km in the  $x$  direction and 15 km in the  $y$  direction. The shear prestress is aligned with the  $x$  axis. The constitutive parameters that govern the rupture evolution are given in table 2.

To initiate the rupture, we impose a 3 km  $\times$  3 km square nucleation zone centered on the fault. The rupture initiates because we have set the initial shear stress slightly higher than the initial static yield stress in the nucleation zone. We assume an infinite static frictional stress outside the 30 km  $\times$  15 km which prohibits the propagation of the rupture beyond this surface.

Table 2:

Parameters	Nucleation	Outside nucleation
Initial shear stress $\sigma_0$ (MPa)	81.6	70
Initial normal stress $-\sigma_n$ (MPa)	120	120
Static friction coefficient $\mu_s$	0.677	0.677
Dynamic friction coefficient $\mu_d$	0.525	0.525
Static yielding stress $\sigma_s = -\mu_s \sigma_n$ (MPa)	81.24	81.24
Dynamic yielding stress $\sigma_d = -\mu_d \sigma_n$ (MPa)	63	63
Critical slip distance $\delta_0$ (m)	0.4	0.4

We used for this simulation a structured mesh with space path equal to 0.15 km and time step  $\Delta t = 6.5 \cdot 10^{-3}$  s, while the DFM method used a grid size  $\Delta x = 0.1$  km and time step  $\Delta t = 8 \cdot 10^{-3}$  s. The calculation was performed on 100 processors using message passing interface (MPI). The CPU time of the simulation is around  $5 \cdot 10^3$  s.

We compare seismograms computed at four points located on the fault plane (Fig.1). Fig.2 and Fig.3 compare respectively the shear stress and the slip velocity numerical



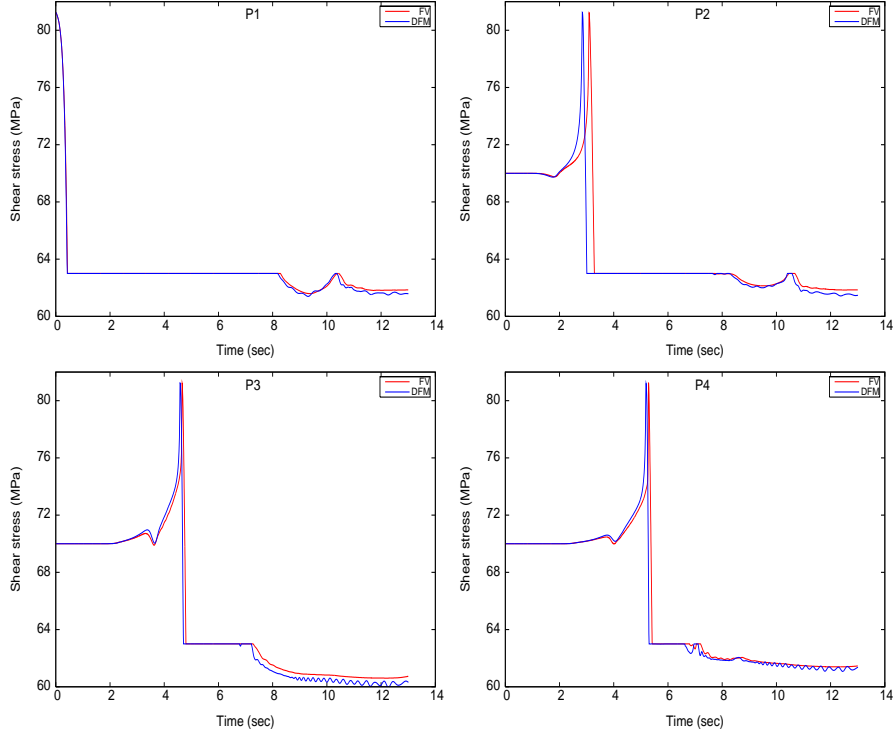


Figure 2: Comparison of the FV numerical solutions (red) and the DFM numerical solution (blue) of the shear stress in four points located on the fault surface. Global good agreement can be noticed.

solutions of our approach and the DFM approach. One can see a good global agreement between the numerical solutions, even though the slip velocity seems to be underestimated for the finite volume method. We also notice differences in the arrival time, especially in the anti-plane direction. Let us remark that the triangular discretisation of the fault surface could make the observational points slightly far from their expected positions (i.e. comparatively to the cartesian grid used by the FD method). This difference could be reduced if the mesh is refined enough along the fault surface.

Fig.4 shows a comparison of contours of rupture time for both approaches. One can see that the rupture propagates at almost the same speed. The level of agreement appears to be good if one takes into consideration the relative error due to the irregular distribution of the points on the fault surface. Small differences are noticed at long time, especially in the anti-plane direction.

Fig.5 describes the slip velocity and the shear stress time history profiles along the  $x$ -axis (in-plane direction) and the  $y$ -axis (anti-plane direction). We can clearly see the  $P$  and  $S$  waves returning from the borders of the fault. The  $P$  wave coming back from the left and the right sides of the fault travels in the in-plane direction.

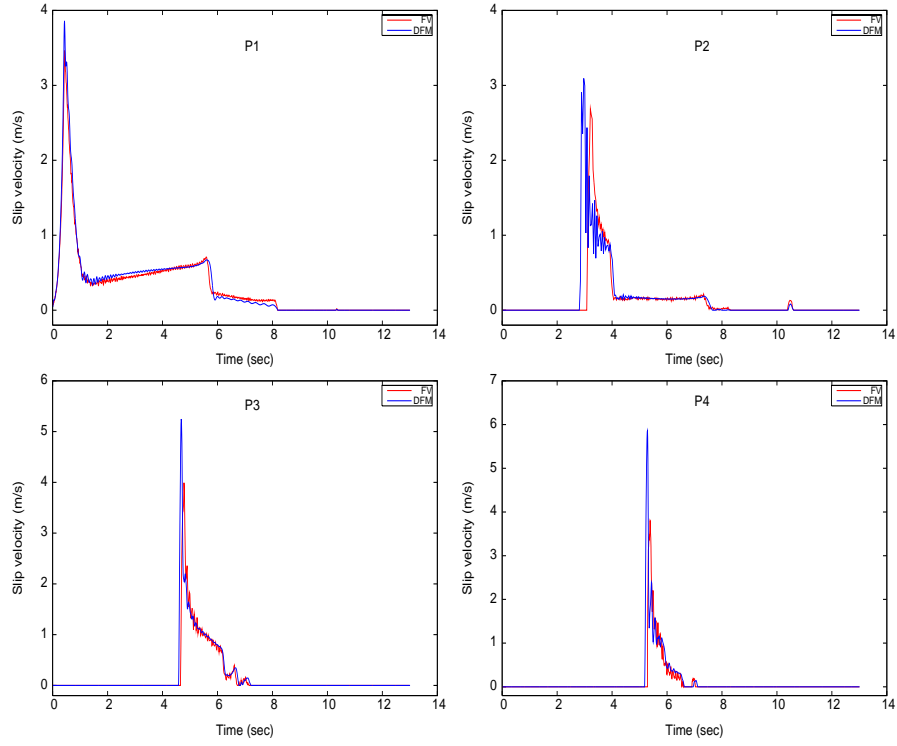


Figure 3: Comparison of the FV numerical solutions (red) and the DFM numerical solution (blue) of the slip velocity in four points located on the fault surface. The solutions are almost similar, even though the slip velocity peak seems to be underestimated for the FV approach. The solutions are presented with no special filter treatment.

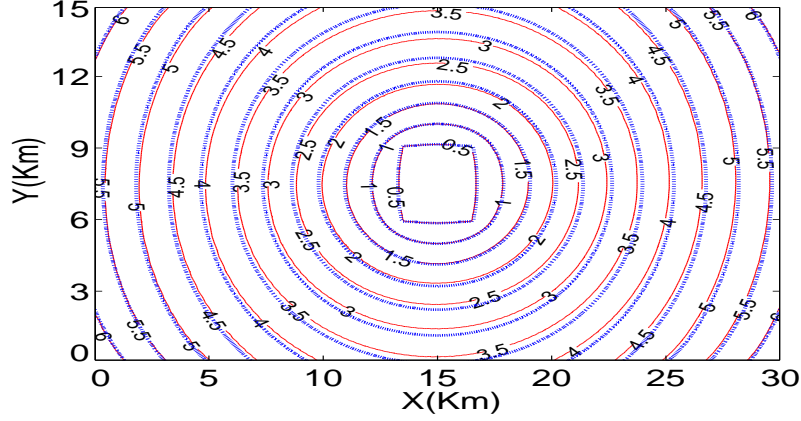


Figure 4: Rupture front contours at 0.5s intervals computed along the fault surface for the FV (red) and the DFM (blue) methods. Good agreement of the time histories can be noticed. The rupture seems to propagate at lower speed along the anti-plane direction for the FV method.

The shear wave coming back from the left and the right sides of the fault are denoted by *SI* and is travelling predominantly along the in-plane direction, while the shear wave coming back from the top and the bottom borders is denoted by *SA*, and is travelling predominantly along the anti-plane direction. In addition, due to the *SI* wave propagating backwards, a late reactivation of the slip after its initial arrest could also be seen on the slip velocity figures. These behaviours have also been observed by Day et al. (2005), and our numerical solutions seem qualitatively similar to the DFM numerical solutions for all the principal processes of the rupture : nucleation, evolution, stopping phase and overshoot stress evolution.

Fig.6 displays snapshots of the slip velocity and the shear stress on the fault plane at 0.5s time intervals . One can clearly identify in the slip velocity figures the direct waves as well as reflected ones we have previously described. Due to the choice of the initial parameters, the rupture propagates at subshear regime. One can appreciate in the shear stress snapshots the direct shear wave travelling ahead the rupture front.

## 5.2 Test problem 2

In this section we solve one of the non-planar parabolic-shaped rupture problems tackled by Cruz-Atienza et al. (2007). The problem we have selected also considers a linearly elastic homogeneous medium. The characteristics of the medium are given in table 1. The rupture surface is a parabola in the  $xz$  plane, given by the equation

$$(z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 / (4e) \quad (81)$$

where  $(x_0, z_0)$  correspond to the vertex at the center of the medium, and  $e = 10$  km is the eccentricity of the parabola. The coordinate  $y$  of the fault surface is translation

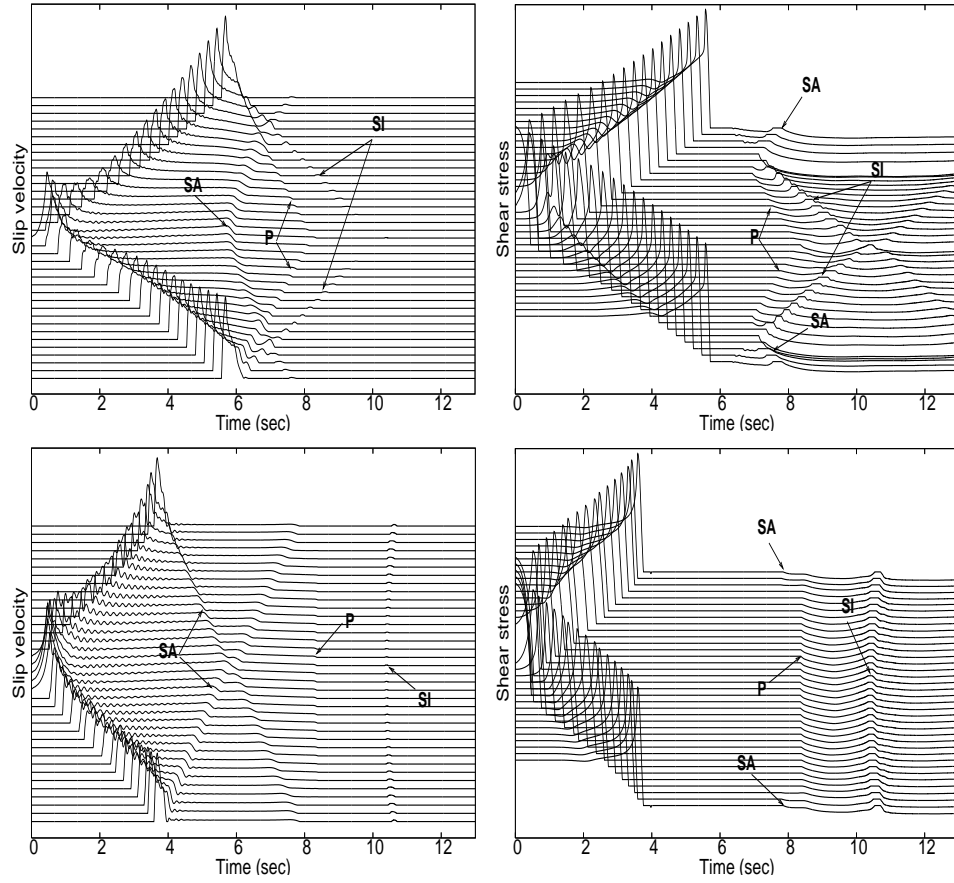


Figure 5: Time history of the slip velocity (left) and the shear stress (right) along the in-plane (top) and the anti-plane (bottom) directions. *P* and *SI* are respectively the primary and secondary waves generated by the left and right edges of the fault. *SA* is the secondary wave generated by the top and the bottom edges of the fault.

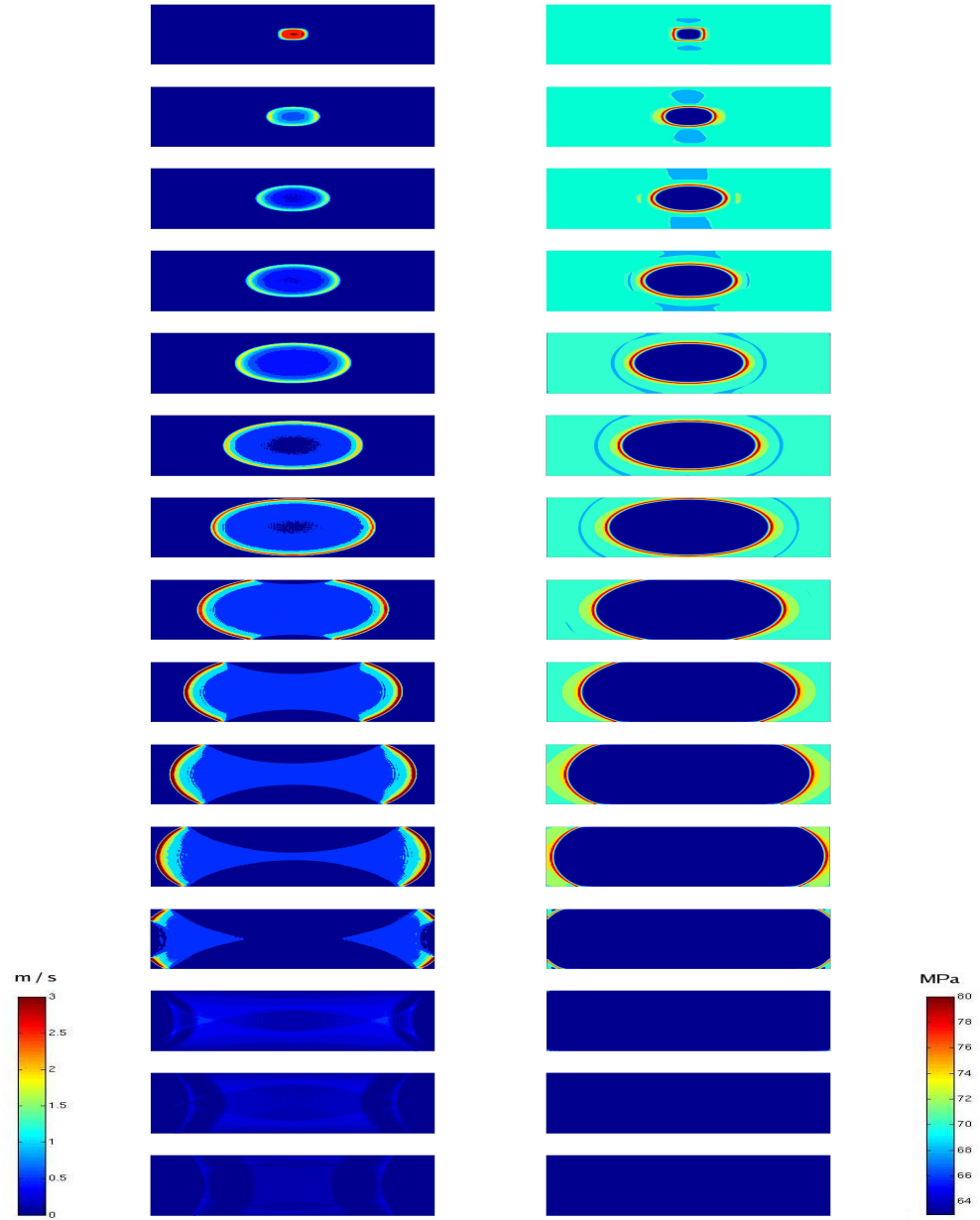


Figure 6: Snapshots of the slip velocity (left) and the shear stress (right) at 0.5s time intervals along the fault.

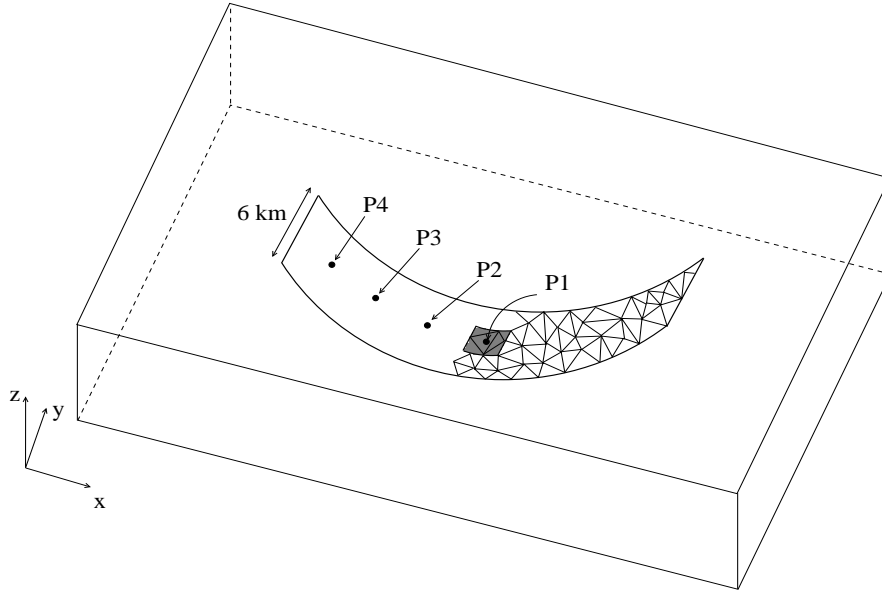


Figure 7: 3D view of a non planar crack surface. The gray “square” region of 2 km sides length centered along the strike and dip directions represents the nucleation zone. The four observational points aligned with the dip direction are separated by 4 km measured along the fault surface from each other. The fault surface is discretized by triangles as partly shown on the figure.

invariant. A 3D view of the fault surface is presented on the Fig.7.

The nucleation zone is a “square region” of 2 km sides length (gray patch in Fig.7) centered at  $(x_0, z_0)$ . In this zone, the shear stress is supposed to be slightly higher than the initial static yield stress. The shear prestress is aligned with the dip direction and assumed to be constant along the non planar fault surface. This may suppose an extremely heterogeneous surrounding stress field. To perform comparisons, we chose four observational points placed along the  $x$ -axis (in-plane direction). The first point corresponds to the center of the nucleation zone  $(x_0, z_0)$  and the other points are separated each other by 4 km measured over the rupture surface. We assume an infinite static frictional stress at the fault borders forbidding the rupture to propagate beyond them. The constitutive parameters that govern the rupture evolution are given in table 3.

Equation (12) means that the friction resistance is equal to the product of the normal stress and the friction coefficient. During the rupture, the normal stress may change from its initial value. As a consequence, the static frictional stress  $\mu_s$  can be various. Although our method is able to deal with such a feature, we chose to assume that the normal stress is constant during the rupture in order to follow the former BIE simulations (Aochi et al., 2000) with which the comparisons are made. Both the static and dynamic fault strength depend only on the initial static traction during the rupture

Table 3:

Parameters	Nucleation	Outside nucleation
Initial shear stress $\sigma_0$ (MPa)	97.49	73.73
Initial normal stress $-\sigma_n$ (MPa)	120	120
Static friction coefficient $\mu_s$	0.677	0.677
Dynamic friction coefficient $\mu_d$	0.525	0.525
Static yielding stress $\sigma_s = -\mu_s \sigma_n$ (MPa)	81.24	81.24
Dynamic yielding stress $\sigma_d = -\mu_d \sigma_n$ (MPa)	63	63
Critical slip distance $\delta_0$ (m)	0.8	0.8

process.

In order to discretize the fault surface, we used a non structured triangulation with space path approximatively equal to 0.1 km. The medium volume is then discretized by tetrahedra that take into account this triangulation (i.e. two tetrahedra above and below the fault share at most a unique triangle on the fault surface). Thus, no confusion of the faces belonging to the fault surface would occur. The time step is obtained with respect to a CFL criterion, and is equal to  $2.1 \cdot 10^{-3}$  (see Benjemaa et al. (2006) for more details about the CFL criterion). The BIE method used a space path  $\Delta x = 0.15$  km with corresponding time step  $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-2}$ . We performed our computation over 64 processors using message passing interface (MPI) and the CPU time of the simulation is around  $2 \cdot 10^3$  s.

Fig.8 and Fig.9 show respectively comparisons of the shear stress and the slip velocity computed at four points located on the fault surface. Peak stress values of the BIE solution lie below the prescribed yield stress because of the spatial interpolation carried out on this solution (see Cruz-Atienza et al. (2007)). We can see a good agreement between the numerical solutions. In order to reduce the spurious high frequency due to the rupture front propagation, we have added a diffusion term with coefficient  $\eta = 0.2$  to the elastodynamic equations. We do not discuss this additional term here, but one can find all details in Benjemaa et al. (2007). Let us remark that this artifact was only used in order to make the solutions smoother and thus more suitable for comparisons. Besides, we have checked that neither the rupture time nor the slip velocity amplitude were affected by this operation.

As for the first test case, our method seems to slightly underevaluate the slip velocity along the fault. This is due to the non structured mesh used for the discretization of the fault surface. In fact, in Benjemaa et al. (2007) we have shown that a minimal number of “elements” (segments in 2D and triangles in 3D) must belong to the cohesion zone in order to achieve convergence of the numerical solution. We expect the solution to be more accurate if the mesh is refined enough on the fault surface. We shall make more investigations of the mesh influence on the solution accuracy in a future work. We can also note in Fig.8 that the  $S$  wave travelling behind the rupture front is very well captured, as well as the shear stress peak.

Fig.10 shows contour plots of the rupture time for both methods. Very good level

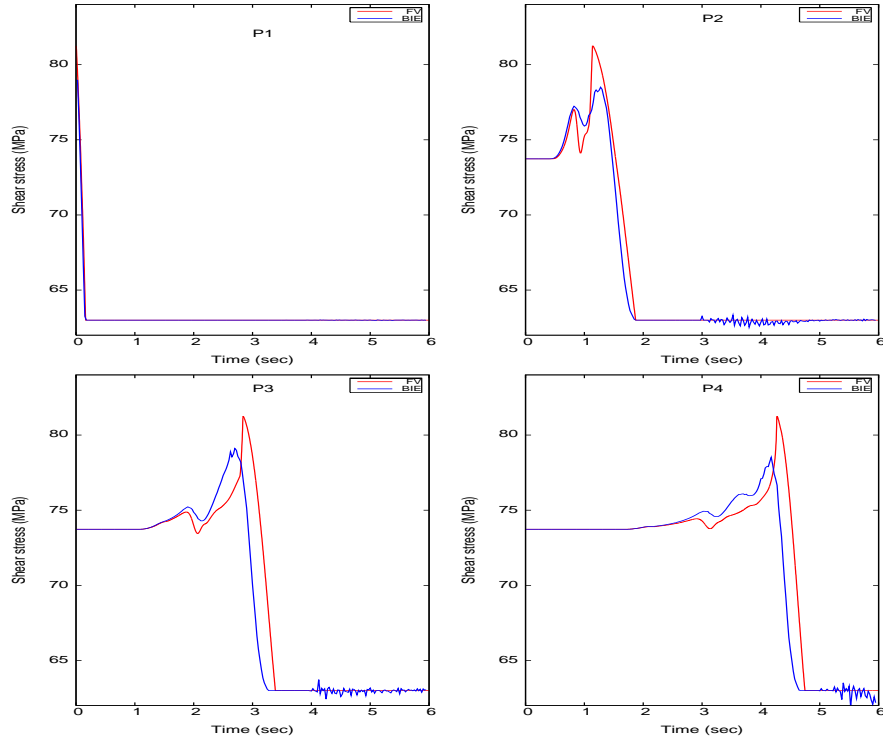


Figure 8: Comparison of the FV numerical solutions (red) and the BIE numerical solution (blue) of the shear stress in four points located on the fault surface. The solutions are very close. The shear wave as well as the peak of the shear stress are very well caught by the FV approach rather than the BIE method.



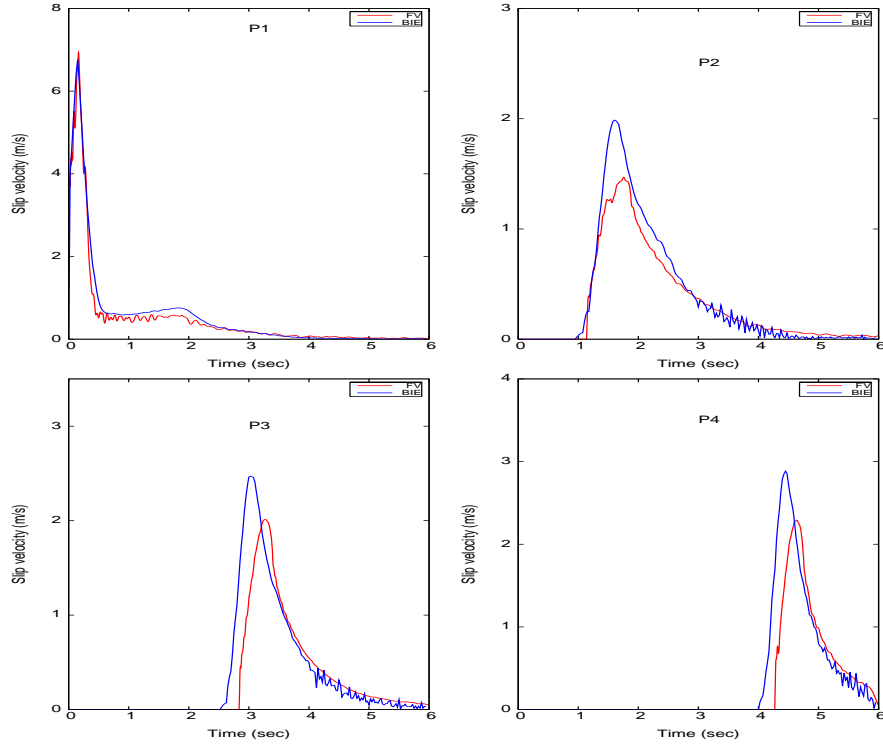


Figure 9: Comparison of the FV numerical solutions (red) and the BIE numerical solution (blue) of the slip velocity in four points located on the fault surface. Small differences are noticed between the solutions. The FV solutions are filtered with diffusion coefficient  $\eta = 0.2$  (see Benjema et al. (2007) for more detail).

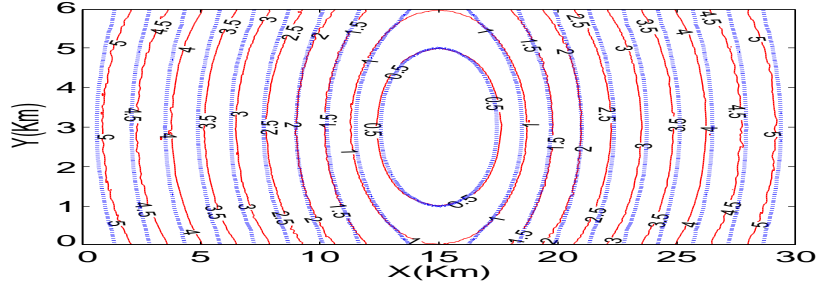


Figure 10: Rupture front contours at 0.5s intervals computed along the parabolic fault surface for the FV (red) and the BIE (blue) methods.

of agreement between the solutions can be noticed. As for the first test case, small differences occur in the anti-plane direction. We expect this aspect could be improved if the mesh is more refined along the fault surface.

As a whole, and in spite of very small differences, the FV method we propose has successfully reproduced two difficult test cases for both planar and non planar fault geometries. This validates our approach as well as the adopted failure criterion.

## 6 Discussion and conclusion

We have presented a finite volume method for the simulation of the spontaneous shear rupture growth problem in 3D. Thanks to an appropriate change of variables, all parameters of the medium are grouped on the left hand side of the elastodynamic equations and integration can be made even if the medium contains heterogeneities. The study of a suitable discrete expression of energy allows us to define the appropriate fracture boundary conditions to be imposed on the crack surface. The shear traction is defined on the fault surface throughout fluxes in such way that no slip velocity occurs when the shear stress modulus is less than the yield friction value. This makes the fracture to have no thickness, so both crack blocks only interact through the fracture traction vector. Consequently, different elastic properties at both sides of the fracture can be properly considered (e.g. bi-materials cracks). Spurious high frequency content in elastic fields at the vicinity of the crack tip can be reduced when appropriate dissipation terms are added. This could be achieved without important additional memory requirement (see Benjemaa et al. (2007) for instance for more details). The comparisons with independent finite difference method (Day et al., 2005) for spontaneous planar rupture case, as well as a boundary integral method (Aochi et al., 2000) for a non planar rupture geometry, revealed a good global agreement between the solutions, validating thus our approach for any kind of rupture geometry. The accuracy of the solution could be improved either by refining the mesh triangulation over the fault surface, or by using a higher order discontinuous Galerkin scheme. In fact, discontinuous Galerkin method can be thought as an extension of the low order finite volume scheme to higher order. Thus, we expect the solution accuracy to be improved if such formulation is used.

## References

- Aagaard, B., Hall, J., & Heaton, T., 2001. Characterization of near-source ground motions with earthquake simulations, *Earthquake Spectra*, **17**, 177–207.
- Aki, K. & Richards, P., 1980. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*, W. H. Freeman & Co, San Francisco.
- Ando, R., Tada, T., & Yamashita, T., 2004. Dynamic evolution of a fault system through interactions between fault segments, *J. Geophys. Res.*, **109**, doi:10.1029/2003JB002665.
- Andrews, D., 1976. Rupture velocity of plain strain shear cracks, *J. Geophys. Res.*, **81**, 5679–5687.
- Andrews, D., 1985. Dynamic plane-strain shear rupture with a slip weakening friction law calculated by a boundary integral method, *Bull. seism. Soc. Am.*, **75**, 1–12.
- Andrews, D., 1999. Test of two methods for faulting in finite difference calculations, *Bull. seism. Soc. Am.*, **89**, **4**, 931–937.
- Aochi, H., Fukuyama, E., & Matsu'ura, M., 2000. Spontaneous rupture propagation of a non planar fault in 3d elastic medium, *PAGEOPH*, **157**, 2003–2027.
- Bécache, E. & Duong, T. H., 1994. A space-time variational formulation for the boundary integral equation in a 2D elastic crack problem, *J. Geophys. Res.*, **28**, 141–176.
- Benjemaa, M., Piperno, S., & Glinsky-Olivier, N., 2006. *Étude de stabilité d'un schéma volumes finis pour les équations de l'élastodynamique en maillages non structurés*, INRIA Sophia Antipolis. RR-5817, France.
- Benjemaa, M., Glinsky-Olivier, N., Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J., & Piperno, S., 2007. Dynamic non-planar crack rupture by a finite volume method, *Geophys. J. Int.*, , doi 10.1111/j.1365-246X.2006.03500.x.
- Capdeville, Y., Chaljub, E., Vilotte, J.-P., & Montagner, J.-P., 2003. Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in realistic 3D global Earth models, *Geophys. J. Int.*, **152**, 34–68.
- Chaljub, E., Capdeville, Y., & Vilotte, J.-P., 2003. Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere: a parallel spectral element approximation on non-conforming grids, *J. Comput. Phys.*, **187**, 457–491.
- Cohen, G. & Fauqueux, S., 2001. 2D elastic modelling with efficient mixed finite elements, in *Extended Abstracts*, Eur. Ass. Expl. Geophys.
- Cruz-Atienza, V. M. & Virieux, J., 2004. Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach, *Geophys. J. Int.*, **158**, 939–954.
- Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J., & Aochi, H., 2007. 3D finite-difference dynamic-rupture modelling along non-planar faults, *Geophysics*, **72**(5), 123–137.

- Das, S. & Aki, K., 1977. A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **50**, 643–668.
- Day, S., 1977. Finite element analysis of seismic scattering problems, *PhD Dissertation*, **54**, 99–104.
- Day, S., 1982. Three-dimensional simulation of spontaneous rupture: the effect of nonuniform prestress, *Bull. seism. Soc. Am.*, **72**, 1881–1902.
- Day, S., Dalguer, L. A., Lapusta, N., & Liu, Y., 2005. Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture, *J. Geophys. Res.*, **110**, B12307.
- Festa, A. & Vilotte, J.-P., 2005. Spectral element simulations of dynamic rupture along kinked faults, *EGU Meeting*, pp. SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU05-A-05122.
- Harris, R. A., Archuleta, R., Aagaard, B., Ampuero, J. P., Andrews, D. J., Dalguer, L., Day, S., Dunham, E., Ely, G., Kase, Y., Lapusta, N., Liu, Y., Ma, S., Oglesby, D., Olsen, K., & Pitarka, A., 2004. The source physics of large earthquakes: Validating spontaneous rupture methods, *Eos Trans. AGU, Fall Meet. Suppl.*, **85(47)**, S12A-05.
- Huang, H. & Costanzo, F., 2004. On the use of space-time finite elements in the solution of elasto-dynamic fracture problems, *Int. J. of fracture*, **127**, 119–146.
- Ida, Y., 1972. Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and griffith's specific surface energy, *J. Geophys. Res.*, **77**, 3796–3805.
- Kame, N. & Yamashita, T., 1999. Simulation of the spontaneous growth of a dynamic crack without constraints on the crack tip path, *Geophys. J. Int.*, **139**, 345–358.
- Komatitsch, D. & Vilotte, J.-P., 1998. The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2-D and 3-D geological structures, *Bull. seism. Soc. Am.*, **88**, 368–392.
- L., D. & S., D., 2007. Staggered-grid split-node method for spontaneous rupture simulation, *J. Geophys. Res.*, **112(B2)**, doi: 10.1029/2006JB004467.
- Madariaga, R., 1976. Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. seism. Soc. Am.*, **66**, 639–666.
- Oglesby, D. D. & Archuleta, R. J., 2003. The three-dimensional dynamics of a nonplanar thrust fault, *Bull. seism. Soc. Am.*, **93**, 2222–2235.
- Palmer, A. & Rice, J., 1973. The growth of slip surfaces in the progressive failure of overconsolidated clay slopes, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A332**, 537.
- Tada, T. & Madariaga, R., 2001. Dynamic modelling of the flat 2-D crack by a semi-analytical BIEM scheme, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **50**, 227–251.
- Tada, T. & Yamashita, T., 1977. Non-hypersingular boundary integral equations for two-dimensional non-planar crack analysis, *Geophys. J. Int.*, **130**, 269–282.

- Virieux, J., 1986. P-SV wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress method, *Geophysics*, **51**, 889–901.
- Virieux, J. & Madariaga, R., 1982. Dynamic faulting studied by a finite difference method, *Bull. seism. Soc. Am.*, **72**, 345–369.

# Conclusion

Ce chapitre a été dédié à la validation de notre méthode pour la simulation de la rupture dynamique.

Nous avons traité dans un premier temps le cas d'un espace bidimensionnel. La validation s'est faite par comparaison avec une solution analytique dans le cas où la vitesse de la faille est prédéfinie, et avec des solutions numériques issues d'une approche DF, récemment développée par V. M. Cruz-Atienza [50] dans le cas d'une rupture spontanée. Nous avons constaté une parfaite cohérence entre les résultats. Nous avons présenté également un cas où la faille n'est pas rectiligne. Bien que nous n'ayons pas procédé à des comparaisons quantitatives, la solution obtenue en fin de simulation a été comparée qualitativement avec celle obtenue par V. M. Cruz-Atienza, et les résultats semblent également être en bon accord.

Nous nous sommes intéressés ensuite au cas de la rupture spontanée dans un milieu tridimensionnel. Nous avons présenté diverses comparaisons entre notre méthode et d'autres méthodes numériques. En l'absence de solutions analytiques, cette technique constitue le seul moyen disponible pour vérifier l'exactitude des solutions obtenues. La validité de cet argument se trouve dans le fait que les méthodes numériques avec lesquelles les comparaisons sont faites sont complètement indépendantes de notre méthode. De plus, un des cas tests présentés a fait partie d'un benchmark en 2004 et a été testé donc par une large communauté. Nous avons trouvé un très bon accord entre les solutions. Un comportement très similaire, aussi bien au niveau de la vitesse de propagation du front de la faille que sur la forme des ondes générées au cours de l'avancement mais aussi de la phase d'arrêt a été observé. Nous avons par ailleurs testé un cas où la faille n'est pas plane et avons comparé les résultats avec une méthode intégrale de frontière [13]. Nous avons constaté, là aussi, une bonne cohérence des résultats. Ceci valide très solidement notre méthode et montre bien la capacité de cette dernière à traiter n'importe quel type de géométrie de la faille.



---

# Conclusion générale et perspectives

Nous venons de présenter une nouvelle méthode Galerkin discontinue pour la simulation de la rupture dynamique des séismes. Par leur nature discontinue, les méthodes Galerkin discontinues permettent de considérer de façon “naturelle” les discontinuités que peuvent subir les champs dans le milieu. Tel étant le cas pour les problèmes de rupture, nous avons adopté ces méthodes et les avons adaptées au système de l’élastodynamique. Ainsi, après une brève introduction à la mécanique de la rupture dans le premier chapitre, nous avons formulé, dans la deuxième partie, un schéma Galerkin discontinu pour les équations de l’élastodynamique et étudié, dans le troisième chapitre, les conditions aux limites sur la faille ainsi que sur le bord extérieur du domaine. La validation des résultats en deux et trois dimensions d’espace s’est faite à travers des comparaisons avec d’autres méthodes numériques dans le quatrième chapitre, alors qu’un calcul détaillé des équations est donné dans les annexes.

Afin de bien prendre en compte les conditions aux limites sur la faille, nous avons défini et étudié une énergie discrète du système. Nous avons montré qu’en l’absence de tractions tangentielles sur la faille, cette énergie est conservée par le schéma numérique. Nous avons défini ensuite les flux des tractions tangentielles qu’il faut considérer sur la faille afin de respecter la loi de frottement SWF (1.17). Cette formulation des conditions aux limites de manière faible permet de considérer la faille comme une surface et non comme un volume. Ce dernier critère est très important pour plusieurs raisons : la première est d’ordre physique. En effet, imposer un volume (même infinitésimal) à la faille suppose implicitement que la faille a subi une ouverture entre ses deux lèvres. Ceci a pour conséquence de modifier la contrainte normale qui, a priori continue pour le mode cisailant de rupture, pourrait subir des discontinuités à travers la faille. Or la loi de frottement SWF dépend directement de la contrainte normale et toute altération de cette dernière peut modifier complètement l’histoire de la rupture. La deuxième raison est d’ordre numérique. En effet, si la faille possède une épaisseur, alors les vitesses des éléments à l’intérieur de cette zone sont mal définies dans le sens où l’on ne sait pas s’il faut les calculer à partir des équations de l’élastodynamique, et considérer ainsi ces éléments comme faisant partie d’un milieu continu, ou bien, s’il faut interpoler leurs valeurs à partir du champ de vitesse extérieur à la faille afin d’assurer la continuité de la composante normale et la discontinuité de sa composante tangentielle de ce dernier. Ce critère devient encore plus compliqué si la faille rencontre la surface libre, auquel cas toute interpolation du champ de vitesse peut



---

modifier de façon conséquente les ondes réfléchies par cette surface. Or plusieurs études [117, 118, 119] ont montré que ces ondes peuvent avoir une influence majeure sur la vitesse de la rupture puisqu'elles ont tendance à augmenter la contrainte en des endroits non encore atteints par le front de la faille et faciliter ainsi leur rupture. La dernière raison est d'ordre géométrique, puisqu'il est plus facile de simuler une géométrie courbe de la faille par une surface plutôt que par un volume.

Nous nous sommes intéressés également à l'étude de conditions aux limites absorbantes afin de simuler un domaine infini. Nous avons montré que ces conditions sont stables et assurent, sous une condition de type CFL sur le pas de temps, la décroissance de l'énergie du système. Numériquement, il s'est avéré que ces conditions n'avaient pas un comportement suffisamment précis, essentiellement vis à vis des singularités du champ de contraintes. En effet, le critère d'arrêt de la faille, une fois que cette dernière a atteint une certaine étendue prédéfinie, suppose que la contrainte au bord de la faille peut être infinie sans que la rupture puisse progresser. Ce modèle, appelé modèle des barrières rigides, a été étudié depuis longtemps [90, 53], et il a été démontré que cette singularité persiste même en présence d'une zone de cohésion ou bien d'une zone d'endommagement (breakdown zone) au voisinage du front de la faille [17, 92]. Le champ de contrainte résiduel exhibe une singularité en  $1/\sqrt{r}$  (voir fig.1.7). Ainsi, toute frontière artificielle prise assez proche de cette singularité doit être capable de gérer la différence entre la valeur des contraintes et le champ initial  $\tau_0$ . Ceci n'est malheureusement pas le cas des conditions absorbantes, et nous avons été souvent contraint lors de nos simulations à prendre des frontières artificielles assez éloignées du bord de la faille afin d'éviter au mieux ces singularités, faute de quoi la phase d'arrêt peut être affectée.

Néanmoins, quelques solutions à ce problème peuvent être envisageables. La première est l'utilisation des couches parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layer) [41, 48]. Ces dernières semblent en effet bien adaptées à ce genre de problème puisqu'elles permettent une atténuation exponentielle du champ quelle que soit sa valeur. L'inconvénient majeur des PML est qu'elles nécessitent un coût de calcul supplémentaire, en temps de calcul et en espace mémoire. Une autre alternative serait d'utiliser des barrières non rigides<sup>1</sup> développée par Voisin *et. al* pour le cas bidimensionnel [159] et étendues au cas tridimensionnel par I. Ionescu [93]. La méthode consiste essentiellement à définir une zone de résistance au voisinage du bord de la faille qui permet de lisser la singularité due à l'arrêt brutal de la faille.

Afin de valider notre méthode, nous avons procédé à plusieurs comparaisons de nos résultats numériques avec ceux obtenus par d'autres méthodes. En effet, aucune solution analytique n'existe pour le cas d'une rupture spontanée en mode plan, et ce même pour des géométries de faille assez simples. La dépendance des contraintes d'une loi qui fait intervenir le glissement (ou d'autres variables d'état comme dans le cas de la loi RSF (voir chapitre 1)) rend le problème non linéaire et extrêmement difficile à résoudre théoriquement. Le seul

---

1. smooth strengthening barrier

---

moyen efficace pour valider les résultats numériques est de comparer différentes méthodes numériques. Cet exercice est d'autant plus efficace si ces méthodes sont complètement indépendantes les unes des autres. Dans notre cas, nous avons choisi de faire les comparaisons avec des méthodes de différences finies [50, 56], qui ne se basent pas sur une formulation faible des équations comme les méthodes Galerkin discontinues, et une méthode d'intégrale de frontière semi-analytique et ne reposant pas sur une discrétisation volumique du domaine [13]. Les résultats montrent une très bonne cohérence entre les différentes méthodes aussi bien pour une géométrie simple que complexe de la faille. Ceci valide notre approche et met en évidence la capacité de notre méthode à traiter de phénomènes encore plus complexes (bimatériel ou milieu fortement hétérogène, cas d'une faille en kink, branchement de failles, etc...)

## Perspectives

Les perspectives envisageables pour la suite de ce travail sont réellement multiples et variées. Comme nous venons de le souligner, plusieurs applications peuvent être effectuées directement, soient en variant les paramètres du milieu, soit la géométrie de la faille, soit les deux ensemble. Aucun développement supplémentaire n'est à faire si ce n'est la construction du maillage adéquat au problème envisagé.

La deuxième extension possible est de modifier le code volumes finis existant en un code Galerkin discontinu d'ordre plus élevé. Nous avons essayé tout au long de ce mémoire de formuler les équations de la manière la plus générale et tous les résultats théoriques de stabilité et de conditions aux limites sont donnés sans aucune restriction sur l'ordre du schéma. Ainsi, seul un travail de développement informatique est nécessaire pour prendre en compte le modèle de rupture que nous proposons. Un travail supplémentaire est par contre à effectuer concernant le choix du vecteur traction si ce dernier doit être d'ordre supérieur ou égal à deux.

Les conditions aux limites sur le bord extérieur du domaine restent sujettes à des améliorations. Comme nous l'avons souligné précédemment, bien que ces dernières soient stables, elles ne permettent pas de bien résoudre le champ résiduel final. Quelques voies d'amélioration possibles ont été évoquées un peu plus haut.

Finalement, un travail sur la construction des maillages, et que nous n'avons pas évoqué jusqu'ici, doit être exploré. La simulation des séismes à des échelles réalistes nécessite la construction de maillages de très grande taille. Une géométrie complexe de la faille à l'intérieur du domaine rend la génération du maillage encore plus difficile. Et bien que le code que nous avons développé bénéficie d'une architecture parallèle MPI<sup>2</sup>, le mailleur que nous avons utilisé était lui séquentiel et a été souvent un facteur limitant. Un mailleur à architecture parallèle semble donc mieux approprié pour répondre aux exigences requises par de telles simulations.

---

2. Message Passing Interface

---

---

# Annexes



# Annexe A

## Calcul des flux absorbants

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Calcul de la matrice <math>\mathbb{M}^-</math></b>	<b>122</b>
<b>A.2</b>	<b>Calcul des matrices <math>\mathbb{A}</math> et <math>\mathbb{B}</math></b>	<b>126</b>
A.2.1	Calcul de $\mathbb{A}$	127
A.2.2	Calcul de $\mathbb{B}$	127

---

Considérons dans un cas général un système de loi de conservation qui s'écrit sous la forme :

$$\partial_t w - \sum_{i=1}^d \mathbb{M}_i \partial_{x_i} w = 0, \quad (\text{A.1})$$

où  $w \in \mathbb{R}^d$  est l'inconnue du système, et  $\mathbb{M}_i$ ,  $1 \leq i \leq d$  sont des matrices symétriques (ou symétrisables) à coefficients constants. Une étude du spectre de la matrice  $\mathbb{M} := \sum_{i=1}^d \mathbb{M}_i \vec{n}_i$ , où  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)^t$  est la normale sortante à une surface  $\mathcal{T}$  donnée, montre que les formes des ondes planes solutions du système (A.1) qui se propagent avec un vecteur d'onde parallèle à  $\vec{n}$  sont les vecteurs propres de  $\mathbb{M}$ . Si nous notons  $\mathbb{M}^-$  et  $\mathbb{M}^+$  respectivement les parties négative et positive de la matrice  $\mathbb{M}$  (via sa diagonalisation, puisque  $\mathbb{M}$  est symétrique), alors les solutions associées à  $\mathbb{M}^-$  représentent les solutions qui “sortent” de  $\mathcal{T}$  alors que les solutions associées à  $\mathbb{M}^+$  représentent les solutions qui “rentrent” dans  $\mathcal{T}$ <sup>1</sup>. Le principe des conditions absorbantes consiste à annuler les informations qui rentrent à travers une surface absorbante. Partant de ce principe, nous allons essayer de chercher, dans le cadre des équations de l'élastodynamique, ces conditions dites absorbantes.

---

1. La convention veut que ça soit l'inverse, Nous avons cependant choisi de formuler l'équation (A.1) avec un signe négatif tel que c'est le cas pour le système de l'élastodynamique.

## A.1 Calcul de la matrice $\mathbb{M}^-$

Reprenons donc le système (1.3)-(1.4) qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \overrightarrow{\text{div } \underline{\sigma}} \\ \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} &= \lambda \text{div } \vec{v} \mathbb{I}_n + \mu (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) .\end{aligned}$$

Une intégration par partie sur un volume quelconque  $\Omega$  donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \int_{\partial\Omega} \underline{\sigma} \vec{n} \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} = \lambda \mathbb{I}_n \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} + \mu \int_{\partial\Omega} \vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{v}, \quad (\text{A.3})$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w = \int_{\partial\Omega} \mathbb{M} w, \quad (\text{A.4})$$

avec  $\vec{n}$  la normale unitaire sortante de  $\Omega$ ,  $w = (\vec{v}, \underline{\sigma})^t$  et

$$\mathbb{M} w = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \underline{\sigma} \vec{n} \\ \lambda \mathbb{I}_n (\vec{v} \cdot \vec{n}) + \mu (\vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{v}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Nous cherchons donc à déterminer  $\mathbb{M}^-$ . Pour ce faire, commençons d'abord par calculer les valeurs et vecteurs propres de  $\mathbb{M}$ .

Il est facile de vérifier que pour  $w = (0, \underline{\sigma})^t$ , avec  $\underline{\sigma}$  vérifiant  $\underline{\sigma} \vec{n} = 0$  nous avons  $\mathbb{M} w = 0$ . Ainsi 0 est une valeur propre associée au vecteur propre  $w_0 = (0, \underline{\sigma}_0)^t$  avec  $\underline{\sigma}_0 \vec{n} = 0$ .

Soit maintenant  $\xi$  une valeur propre non nulle de  $\mathbb{M}$ , associée à un vecteur propre  $w$ , et soit  $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$  un repère orthonormé. Nous avons alors :

$$\xi \vec{v} = \frac{1}{\rho} \underline{\sigma} \vec{n} \quad (\text{A.6})$$

$$\xi \underline{\sigma} = \lambda \mathbb{I}_n (\vec{v} \cdot \vec{n}) + \mu (\vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{v}), \quad (\text{A.7})$$

donc

$$\begin{aligned}\rho \xi^2 \vec{v} &= (\lambda \mathbb{I}_n (\vec{v} \cdot \vec{n}) + \mu (\vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{v})) \vec{n} \\ &= \lambda (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \mu ((\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{v}) \\ &= \mu \vec{v} + (\lambda + \mu) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n},\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$(\rho \xi^2 - \mu) \vec{v} = (\lambda + \mu) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (\text{A.8})$$

## Annexe A

---

Ainsi  $\xi = \pm v_s$  avec  $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$  est une valeur propre de  $\mathbb{M}$  associée au vecteur propre  $w_{\pm v_s} = (\vec{v}_{\pm v_s}, \underline{\sigma}_{\pm v_s})^t$  vérifiant  $\vec{v}_{\pm v_s} \cdot \vec{n} = 0$ , c'est à dire  $\vec{v}_{\pm v_s} \in \text{vect} < \vec{t}_1, \vec{t}_2 >$ . Par l'équation (A.6), nous avons :

$$\underline{\sigma}_{\pm v_s} \vec{n} = \pm v_s \rho \vec{v}_{\pm v_s}. \quad (\text{A.9})$$

Donc pour  $\vec{v}_{\pm v_s} = \vec{t}_1$ , nous avons :

$$\underline{\sigma}_{\pm v_s} \vec{n} = \pm v_s \rho \vec{t}_1,$$

et par l'équation (A.7) nous déduisons :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{\pm v_s} \vec{t}_1 &= \pm \frac{\mu}{v_s} \vec{n} \\ \underline{\sigma}_{\pm v_s} \vec{t}_2 &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Pour  $\vec{v}_{\pm v_s} = \vec{t}_2$ , nous avons :

$$\underline{\sigma}_{\pm v_s} \vec{n} = \pm v_s \rho \vec{t}_2,$$

et par l'équation (A.7),

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{\pm v_s} \vec{t}_1 &= \vec{0} \\ \underline{\sigma}_{\pm v_s} \vec{t}_2 &= \pm \frac{\mu}{v_s} \vec{n}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\vec{v}$  est colinéaire à  $\vec{n}$ , et en multipliant l'équation (A.8) à droite par  $\vec{n}$ , nous pouvons déduire que

$$(\rho \xi^2 - (\lambda + 2\mu)) (\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Ainsi  $\xi = \pm v_p$  avec  $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  est une valeur propre de  $\mathbb{M}$  associée au vecteur propre  $w_{\pm v_p} = (\vec{v}_{\pm v_p}, \underline{\sigma}_{\pm v_p})^t$ . En choisissant  $\vec{v}_{\pm v_p} = \vec{n}$ , et par l'équation (A.6) nous avons :

$$\underline{\sigma}_{\pm v_p} \vec{n} = \pm v_p \rho \vec{n}$$

et par l'équation (A.7)

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{\pm v_p} \vec{t}_1 &= \pm \frac{\lambda}{v_p} \vec{t}_1 \\ \underline{\sigma}_{\pm v_p} \vec{t}_2 &= \pm \frac{\lambda}{v_p} \vec{t}_2. \end{aligned}$$

Pour résumer, nous avons :

- $\xi = \pm v_p$  est une valeur propre simple associée au vecteur propre  $(\vec{n}, \underline{\sigma}_1)$  avec

$$\underline{\sigma}_1 \vec{n} = \xi \rho \vec{n} \quad (\text{A.11})$$

$$\underline{\sigma}_1 \vec{t}_1 = \frac{\lambda}{\xi} \vec{t}_1 \quad (\text{A.12})$$

$$\underline{\sigma}_1 \vec{t}_2 = \frac{\lambda}{\xi} \vec{t}_2, \quad (\text{A.13})$$



ou encore via l'équation (A.7),

$$\underline{\sigma}_1 = \frac{1}{\xi} (\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n}) . \quad (\text{A.14})$$

- $\xi = \pm v_s$  est une valeur propre (simple en 2D et double en 3D) associée aux vecteurs propres  $(\vec{t}_1, \underline{\sigma}_2^1)$  et  $(\vec{t}_2, \underline{\sigma}_2^2)$ , avec

$$\underline{\sigma}_2^1 \vec{n} = \xi \rho \vec{t}_1 \quad (\text{A.15})$$

$$\underline{\sigma}_2^1 \vec{t}_1 = \frac{\mu}{\xi} \vec{n} \quad (\text{A.16})$$

$$\underline{\sigma}_2^1 \vec{t}_2 = \vec{0}, \quad (\text{A.17})$$

et

$$\underline{\sigma}_2^2 \vec{n} = \xi \rho \vec{t}_2 \quad (\text{A.18})$$

$$\underline{\sigma}_2^2 \vec{t}_1 = \vec{0} \quad (\text{A.19})$$

$$\underline{\sigma}_2^2 \vec{t}_2 = \frac{\mu}{\xi} \vec{n}, \quad (\text{A.20})$$

ou encore via les équations (A.6) et (A.7),

$$\underline{\sigma}_2 = \underline{\sigma}_2 \vec{n} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \underline{\sigma}_2 \vec{n}. \quad (\text{A.21})$$

- $\xi = 0$  est une valeur propre (simple en 2D et triple en 3D) associée aux vecteurs propres  $(\vec{0}, \underline{\sigma}_0)$ , avec :

$$\underline{\sigma}_0 \vec{n} = \vec{0}. \quad (\text{A.22})$$

Nous allons maintenant calculer  $\mathbb{M}^-$ . Nous savons déjà que  $\mathbb{M}^-$  peut s'écrire :

$$\mathbb{M}^- = \frac{1}{2} (\mathbb{M}^- | \mathbb{M} |). \quad (\text{A.23})$$

Nous savons aussi que le système linéaire de l'élastodynamique peut s'écrire en variables découplées (formulation contraintes-vitesse), c'est à dire que  $\mathbb{M} w$  est de la forme :

$$\mathbb{M} w = \begin{pmatrix} F(\underline{\sigma}) \\ G(\vec{v}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

avec  $F$  et  $G$  deux fonctions linéaires (voir équation (A.5)). Nous allons faire l'hypothèse que  $| \mathbb{M} |$  se découple également en contraintes-vitesse et s'écrit sous la forme :

$$| \mathbb{M} | w = \begin{pmatrix} f(\vec{v}) \\ g(\underline{\sigma}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

avec  $f$  et  $g$  deux fonctions linéaires de  $\vec{v}$  et  $\underline{\sigma}$  respectivement.

Rappelons que si  $\xi$  est une valeur propre de  $\mathbb{M}$  associée à un vecteur propre  $w$  alors :

- si  $\xi \geq 0$  alors  $| \mathbb{M} | w = \mathbb{M} w = \xi w$ .

## Annexe A

- si  $\xi \leq 0$  alors  $|\mathbb{M}| w = -\mathbb{M} w = -\xi w$ .

En parcourant tous les vecteurs propres de  $\mathbb{M}$  (qui sont aussi ceux de  $|\mathbb{M}|$ ), nous pouvons déduire que :

$$|\mathbb{M}| \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \frac{1}{v_p} (\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_p \vec{n} \\ \lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{n}) \\ g\left(\frac{1}{v_p} (\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n})\right) \end{pmatrix}$$

$$|\mathbb{M}| \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \frac{-1}{v_p} (\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_p \vec{n} \\ -(\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{n}) \\ g\left(\frac{-1}{v_p} (\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n})\right) \end{pmatrix}$$

Ces équations sont redondantes et sont équivalentes à :

$$\begin{cases} f(\vec{n}) = v_p \vec{n} \\ g(\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n}) = v_p (\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n}) . \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

De même, nous trouvons :

$$|\mathbb{M}| \begin{pmatrix} \vec{t}_i \\ v_s \rho (\vec{t}_i \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_s \vec{t}_i \\ v_s^2 \rho (\vec{t}_i \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{t}_i) \\ g(v_s \rho (\vec{t}_i \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}_i)) \end{pmatrix}$$

$$|\mathbb{M}| \begin{pmatrix} \vec{t}_i \\ -v_s \rho (\vec{t}_i \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_s \vec{t}_i \\ -v_s^2 \rho (\vec{t}_i \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{t}_i) \\ g(-v_s \rho (\vec{t}_i \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}_i)) \end{pmatrix},$$

pour  $i \in \{1,2\}$ . Ces équations sont aussi redondantes et sont équivalentes à :

$$i \in \{1,2\}, \begin{cases} f(\vec{t}_i) = v_s \vec{t}_i \\ g(\vec{t}_i \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}_i) = v_s (\vec{t}_i \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}_i) \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Enfin, nous avons :

$$\forall \underline{\sigma}_0 \text{ tel que } \underline{\sigma}_0 \vec{n} = \vec{0}, \quad |\mathbb{M}| \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \underline{\sigma}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{0}) \\ g(\underline{\sigma}_0) \end{pmatrix},$$

ce qui se résume en :

$$\forall \underline{\sigma}_0 \text{ tel que } \underline{\sigma}_0 \vec{n} = \vec{0}, \quad g(\underline{\sigma}_0) = \underline{0}. \quad (\text{A.28})$$

Notons  $\Pi_{\vec{n}} = \vec{n} \otimes \vec{n}$  la projection orthogonale sur l'espace  $\text{vect} < \vec{n} >$ . Alors l'application linéaire  $f$  est entièrement déterminé par (A.26-A.27-A.28) et vaut :

$$f = v_s \mathbb{I}_n + (v_p - v_s) \Pi_{\vec{n}}. \quad (\text{A.29})$$

**Remarque A.1.1** *Le calcul précédent a été déduit à partir de l'équation (A.2), c'est-à dire en divisant l'équation (1.3) par la densité  $\rho$ . Ainsi, pour retrouver l'expression de  $f$*

relativement à l'équation (1.3), il faut multiplier l'équation (A.29) par  $\rho$ . L'expression de  $f$  est alors donnée par

$$f = \rho (v_s \mathbb{I}_n + (v_p - v_s) \Pi_{\vec{n}}) \quad (\text{A.30})$$

ou encore

$$f(\vec{v}) = \rho (v_s \vec{v} + (v_p - v_s) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}) \quad (\text{A.31})$$

De même, l'application linéaire  $g$  est entièrement déterminé par (A.26-A.27-A.28) et vaut :

$$g(\underline{\sigma}) = \frac{\vec{T} \cdot \vec{n}}{\rho v_p} (\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \Pi_{\vec{n}}) + v_s \left( \vec{T} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{T} \right), \text{ avec } \vec{T} = \underline{\sigma} \vec{n},$$

ce qui peut se réécrire en :

$$g(\underline{\sigma}) = \frac{\underline{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n}}{\rho v_p} (\lambda \mathbb{I}_n + 2\mu \Pi_{\vec{n}}) + v_s \left( (\underline{\sigma} - 2(\underline{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n}) \mathbb{I}_n) \Pi_{\vec{n}} + \Pi_{\vec{n}} \underline{\sigma} \right). \quad (\text{A.32})$$

Finalement, en remplaçant  $f$  et  $g$  par leurs expressions respectives, nous pouvons conclure que la matrice  $\mathbb{M}^-$  est donnée par

$$\mathbb{M}^- w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \underline{\sigma} \vec{n} - v_s \vec{v} - (v_p - v_s) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \lambda \mathbb{I}_n (\vec{v} \cdot \vec{n}) + \mu (\vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{v}) - v_s (\underline{\sigma} \vec{n} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \underline{\sigma} \vec{n}) \\ -\frac{\underline{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n}}{v_p} ((v_p^2 - 2v_s^2) \mathbb{I}_n + 2v_s (v_s - v_p) \vec{n} \otimes \vec{n}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

**Remarque A.1.2** Rappelons ici aussi que cette matrice est relative au système (A.2)-(A.3). Ainsi, et en vertu de la remarque A.1.1, nous pouvons déduire la matrice des flux absorbants correspondant au système (1.3)-(1.4)

$$\mathbb{M}^- w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underline{\sigma} \vec{n} - \rho (v_s \vec{v} + (v_p - v_s) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}) \\ \lambda \mathbb{I}_n (\vec{v} \cdot \vec{n}) + \mu (\vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{v}) - v_s (\underline{\sigma} \vec{n} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \underline{\sigma} \vec{n}) \\ -\frac{\underline{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n}}{v_p} ((v_p^2 - 2v_s^2) \mathbb{I}_n + 2v_s (v_s - v_p) \vec{n} \otimes \vec{n}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

## A.2 Calcul des matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$

Nous allons maintenant expliciter les expressions des matrices  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  qui ne sont autres que les matrices des applications linéaires  $f$  et  $g$ . Nous allons nous concentrer sur le cas d'un espace tridimensionnel. Cependant, le même raisonnement s'applique aussi bien au cas d'un espace bidimensionnel, et sera par ailleurs détaillé dans l'annexe B.

### A.2.1 Calcul de $\mathbb{A}$

Rappelons que  $f$  s'écrit :

$$f = \rho (v_s \mathbb{I}_n + (v_p - v_s) \Pi_{\vec{n}}) .$$

Nous en déduisons facilement l'expression de  $\mathbb{A}$ ,

$$\mathbb{A} = \rho \begin{pmatrix} v_s + (v_p - v_s) n_x^2 & (v_p - v_s) n_x n_y & (v_p - v_s) n_x n_z \\ (v_p - v_s) n_x n_y & v_s + (v_p - v_s) n_y^2 & (v_p - v_s) n_y n_z \\ (v_p - v_s) n_x n_z & (v_p - v_s) n_y n_z & v_s + (v_p - v_s) n_z^2 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.35})$$

Le spectre de  $\mathbb{A}$  est composé d'une valeur propre simple  $\rho v_p$ , associée au vecteur propre  $\vec{n}$ , et d'une valeur propre double  $\rho v_s$ , associée à deux vecteurs propres engendrant  $\langle \vec{n} \rangle^\perp$ .

### A.2.2 Calcul de $\mathbb{B}$

L'expression de la matrice  $\mathbb{B}$  est un peu plus compliquée à déduire, vu que  $g$  est une fonction linéaire du tenseur  $\underline{\sigma}$ , alors que nous cherchons l'expression d'une matrice  $\mathbb{B}$  relative au vecteur  $\vec{\sigma}$ . Reprenons donc dans un premier temps l'équation (1.4) relative à la variable  $\underline{\sigma}$ , qui s'écrit après avoir remplacer  $\mathbb{M}$  par  $\mathbb{M}^-$  :

$$\partial_t \underline{\sigma} = g(\underline{\sigma}) , \quad (\text{A.36})$$

ou de manière équivalente,

$$\partial_t \underline{\sigma} = \mathbb{G} \underline{\sigma} , \quad (\text{A.37})$$

où  $\mathbb{G}$  est la matrice de l'application linéaire  $g$ . En notant  $\tilde{\mathbb{G}}$  la matrice donnée par

$$\tilde{\mathbb{G}} := \mathbb{G} \underline{\sigma} , \quad (\text{A.38})$$

où  $\underline{\sigma}$  est le tenseur

$$\underline{\sigma} = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} , \quad (\text{A.39})$$

nous obtenons après développement

$$\partial_t \sigma_{ij} = \tilde{\mathbb{G}}_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq 3 , \quad (\text{A.40})$$

soit en réordonnant les termes de  $\tilde{\mathbb{G}}_{ij}$ ,

$$\partial_t \sigma_{ij} = \sum_{1 \leq p, q \leq 3} \tilde{\mathbb{G}}_{ij}^{pq} \sigma_{pq} \quad 1 \leq i, j \leq 3 . \quad (\text{A.41})$$

Ainsi, si  $\vec{\sigma}$  désigne le vecteur

$$\vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^t , \quad (\text{A.42})$$

et si nous notons  $\hat{\mathbb{G}}$  la matrice

$$\hat{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{G}}_{11}^{11} & \tilde{\mathbb{G}}_{11}^{22} & \tilde{\mathbb{G}}_{11}^{33} & \tilde{\mathbb{G}}_{11}^{12} & \tilde{\mathbb{G}}_{11}^{13} & \tilde{\mathbb{G}}_{11}^{23} \\ \tilde{\mathbb{G}}_{22}^{11} & \tilde{\mathbb{G}}_{22}^{22} & \tilde{\mathbb{G}}_{22}^{33} & \tilde{\mathbb{G}}_{22}^{12} & \tilde{\mathbb{G}}_{22}^{13} & \tilde{\mathbb{G}}_{22}^{23} \\ \tilde{\mathbb{G}}_{33}^{11} & \tilde{\mathbb{G}}_{33}^{22} & \tilde{\mathbb{G}}_{33}^{33} & \tilde{\mathbb{G}}_{33}^{12} & \tilde{\mathbb{G}}_{33}^{13} & \tilde{\mathbb{G}}_{33}^{23} \\ \tilde{\mathbb{G}}_{12}^{11} & \tilde{\mathbb{G}}_{12}^{22} & \tilde{\mathbb{G}}_{12}^{33} & \tilde{\mathbb{G}}_{12}^{12} & \tilde{\mathbb{G}}_{12}^{13} & \tilde{\mathbb{G}}_{12}^{23} \\ \tilde{\mathbb{G}}_{13}^{11} & \tilde{\mathbb{G}}_{13}^{22} & \tilde{\mathbb{G}}_{13}^{33} & \tilde{\mathbb{G}}_{13}^{12} & \tilde{\mathbb{G}}_{13}^{13} & \tilde{\mathbb{G}}_{13}^{23} \\ \tilde{\mathbb{G}}_{23}^{11} & \tilde{\mathbb{G}}_{23}^{22} & \tilde{\mathbb{G}}_{23}^{33} & \tilde{\mathbb{G}}_{23}^{12} & \tilde{\mathbb{G}}_{23}^{13} & \tilde{\mathbb{G}}_{23}^{23} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.43})$$

alors l'équation (A.41) s'écrit de manière équivalente :

$$\partial_t \vec{\sigma} = \hat{\mathbb{G}} \vec{\sigma}. \quad (\text{A.44})$$

Rappelons aussi qu'à ce stade, l'étude précédente est faite à partir du système (1.3)-(1.4), c'est à dire sans le changement de variables (2.13). En tenant donc compte de ce changement de variables, ainsi que de la symétrisation du système (2.22) via la multiplication par la matrice  $\mathbb{S}_0$ , nous pouvons conclure que  $\mathbb{B}$  est donnée par

$$\mathbb{B} = \Lambda_0 \mathbb{R} \hat{\mathbb{G}} \mathbb{R}^{-1}, \quad (\text{A.45})$$

ce qui donne après calcul

$$\begin{aligned} \mathbb{B} = & \frac{1}{\rho v_s} \begin{pmatrix} 1 & n_x^2 - n_z^2 & n_y^2 - n_z^2 & 2n_x n_y & 2n_x n_z & 2n_y n_z \\ n_x^2 - n_z^2 & n_x^2 + n_z^2 & n_z^2 & n_x n_y & 0 & -n_y n_z \\ n_y^2 - n_z^2 & n_z^2 & n_y^2 + n_z^2 & n_x n_y & -n_x n_z & 0 \\ 2n_x n_y & n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 + n_y^2 & n_y n_z & n_x n_z \\ 2n_x n_z & 0 & -n_x n_z & n_y n_z & n_x^2 + n_z^2 & n_x n_y \\ 2n_y n_z & -n_y n_z & 0 & n_x n_z & n_x n_y & n_y^2 + n_z^2 \end{pmatrix} \\ & + \frac{v_s - v_p}{\rho v_s v_p} \begin{pmatrix} 1 \\ n_x^2 - n_z^2 \\ n_y^2 - n_z^2 \\ 2n_x n_y \\ 2n_x n_z \\ 2n_y n_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ n_x^2 - n_z^2 \\ n_y^2 - n_z^2 \\ 2n_x n_y \\ 2n_x n_z \\ 2n_y n_z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.46}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\rho v_p v_s} \begin{array}{c} 0 \\ \hline \begin{array}{ccccccc} v_s & n_x^2 - n_z^2 & v_s & n_y^2 - n_z^2 & v_s & 2 n_x n_y v_s & 2 n_x n_z v_s \\ n_x^2 - n_z^2 & v_s & n_x^2 + n_z^2 & v_p + n_x^2 - n_z^2 & 2 n_y^2 (v_s - v_p) & n_x n_y & 2 n_x n_z \\ n_y^2 - n_z^2 & v_s & n_z^2 v_p + n_x^2 - n_z^2 & 2 n_y^2 (v_s - v_p) & n_y^2 + n_z^2 & v_p + n_y^2 - n_z^2 & 2 n_y n_z \\ 2 n_x n_y v_s & n_x n_y & 2 n_x^2 - n_z^2 & (v_s - v_p) + v_p & n_x^2 + n_z^2 & v_p + 4 n_x^2 n_y^2 (v_s - v_p) & n_x n_z \\ 2 n_x n_z v_s & 2 n_x n_z & n_x^2 - n_z^2 & (v_s - v_p) - v_p & n_y n_z & 4 n_x^2 (v_s - v_p) + v_p & n_x n_z \\ 2 n_y n_z v_s & n_y n_z & 2 n_x^2 - n_z^2 & (v_s - v_p) - v_p & 2 n_y n_z & 2 n_y^2 (v_s - v_p) - v_p & n_y n_z \\ 2 n_y n_z v_s & n_y n_z & 2 n_x^2 - n_z^2 & (v_s - v_p) - v_p & 2 n_y n_z & 2 n_y^2 (v_s - v_p) - v_p & n_y n_z \end{array} \end{array}$$

Les valeurs propres de  $\mathbb{B} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 6}$  sont complexes à déterminer. Un moyen simple de prouver le caractère positif de  $\mathbb{B}$  est d'évaluer les déterminants des matrices :

$$\mathbb{B}_k = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}, \quad \forall 1 \leq k \leq 6.$$

En notant  $D_k$  le déterminant de la matrice  $\mathbb{B}_k$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} D_1 &= 1/(\rho v_p) \\ D_2 &= [n_x^2 + n_z^2 + (n_x^2 - n_z^2)^2]/\rho \\ D_3 &= (9 v_p n_x^2 n_y^2 n_z^2)/\rho \\ D_4 &= D_5 = D_6 = 0. \end{aligned}$$

Comme toutes ces valeurs sont positives, nous déduisons que  $\mathbb{B}$  est une matrice positive.

# Annexe B

## Système d'équations

### Sommaire

---

<b>B.1 Cas bidimensionnel</b>	<b>132</b>
B.1.1 Schéma discret	132
B.1.2 Conditions aux limites	134
<b>B.2 Cas tridimensionnel</b>	<b>139</b>
B.2.1 Schéma discret	140
B.2.2 Conditions aux limites	144
<b>B.3 Algorithme</b>	<b>151</b>

---

Les expressions des équations dans les chapitres précédents étant compactes, nous essayons dans cet annexe d'explicitier leurs écritures, et donnons l'algorithme utilisé pour introduire les lois de frottement qui gouvernent l'évolution de la rupture.



## B.1 Cas bidimensionnel

En deux dimensions d'espace, le système de l'élastodynamique en formulation contraintes-vitesses s'écrit :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.1})$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} . \quad (\text{B.5})$$

Ce système peut être transformé en un système hyperbolique pseudo-conservatif, en introduisant les variables

$$\omega = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} . \quad (\text{B.6})$$

Nous obtenons le système symétrique suivant :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial (\omega + \omega')}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.7})$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial (\omega - \omega')}{\partial z} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{\lambda + \mu} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega'}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} . \quad (\text{B.11})$$

### B.1.1 Schéma discret

En adoptant les notations des sections 2.4 et 2.5, et en suivant un raisonnement analogue, nous pouvons déduire que le système discret, avec des flux centrés en espace et un

## Annexe B

---

schéma saute-mouton en temps, s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_i \mathbb{K}_i \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x (\boldsymbol{\omega}_i^n + \boldsymbol{\omega}'_i^n) - \mathbb{E}_z \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} [(\boldsymbol{\omega}_i^n + \boldsymbol{\omega}'_i^n) n_{x_{ik}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n n_{z_{ik}}] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} [(\boldsymbol{\omega}_k^n + \boldsymbol{\omega}'_k^n) n_{x_{ik}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_k}^n n_{z_{ik}}] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \rho_i \mathbb{K}_i \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n - \mathbb{E}_z (\boldsymbol{\omega}_i^n - \boldsymbol{\omega}'_i^n) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n n_{x_{ik}} + (\boldsymbol{\omega}_i^n - \boldsymbol{\omega}'_i^n) n_{z_{ik}}] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_k}^n n_{x_{ik}} + (\boldsymbol{\omega}_k^n - \boldsymbol{\omega}'_k^n) n_{z_{ik}}] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\boldsymbol{\omega}_i^{n+1} - \boldsymbol{\omega}_i^n}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{E}_z \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} [\mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}}] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} [\mathbf{v}_{\mathbf{x}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}}] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\boldsymbol{\omega}'_i^{n+1} - \boldsymbol{\omega}'_i^n}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{E}_z \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} [\mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}}] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} [\mathbf{v}_{\mathbf{x}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}}] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{E}_z \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} [\mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}}] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} [\mathbf{v}_{\mathbf{z}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}}] . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Dans le cas particulier d'un schéma volumes finis (c'est-à-dire DG- $\mathbb{P}_0$ ), ce système se

simplifie encore puisque nous avons les égalités (voir section 2.6),

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_i &= V_i \\ \mathbb{E}_\alpha &= 0 \quad \forall \alpha \in \{x, z\} \\ \mathbb{F}_{ik} &= \mathbb{G}_{ik} = S_{ik} \quad \forall k \in V(i),\end{aligned}$$

où  $V_i$  est le volume de la cellule  $\mathcal{T}_i$  et  $S_{ik}$  est la surface de l'interface  $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$ . Ainsi, nous obtenons le système suivant :

$$\rho_i V_i \frac{v_{xi}^{n+\frac{1}{2}} - v_{xi}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} [(\omega_i^n + \omega_k^n + \omega_i'^n + \omega_k'^n) n_{x_{ik}} + (\sigma_{xz_i}^n + \sigma_{xz_k}^n) n_{z_{ik}}] \quad (\text{B.17})$$

$$\rho_i V_i \frac{v_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - v_{zi}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} [(\sigma_{xz_i}^n + \sigma_{xz_k}^n) n_{x_{ik}} + (\omega_i^n + \omega_k^n - \omega_i'^n - \omega_k'^n) n_{z_{ik}}] \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} V_i \frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ \left( v_{xi}^{n+\frac{1}{2}} + v_{xk}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{x_{ik}} + \left( v_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + v_{zk}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{1}{\mu_i} V_i \frac{\omega_i'^{n+1} - \omega_i'^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ \left( v_{xi}^{n+\frac{1}{2}} + v_{xk}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{x_{ik}} - \left( v_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + v_{zk}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{1}{\mu_i} V_i \frac{\sigma_{xz_i}^{n+1} - \sigma_{xz_i}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ \left( v_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + v_{zk}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{x_{ik}} + \left( v_{xi}^{n+\frac{1}{2}} + v_{xk}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{z_{ik}} \right]. \quad (\text{B.21})$$

## B.1.2 Conditions aux limites

### B.1.2.1 Conditions aux limites absorbantes

Par un raisonnement identique à celui de l'annexe 1, nous pouvons déduire que les matrices des flux absorbants s'écrivent :

$$\mathbb{A} = \rho \begin{pmatrix} v_s + (v_p - v_s) n_x^2 & (v_p - v_s) n_x n_z \\ (v_p - v_s) n_x n_z & v_s + (v_p - v_s) n_z^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

et

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\rho v_p v_s} \begin{pmatrix} v_s & (n_x^2 - n_z^2) v_s & 2 n_x n_z v_s \\ (n_x^2 - n_z^2) v_s & 4 n_x^2 n_z^2 v_p + (n_x^2 - n_z^2)^2 v_s & 2 n_x n_z (n_x^2 - n_z^2) (v_s - v_p) \\ 2 n_x n_z v_s & 2 n_x n_z (n_x^2 - n_z^2) (v_s - v_p) & 4 n_x^2 n_z^2 v_s + (n_x^2 - n_z^2)^2 v_p \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

## Annexe B

---

$\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont des matrices symétriques positives. En effet, nous avons les égalités suivantes :

$$\mathbb{A} = \rho \mathbb{T}^t \mathbb{D} \mathbb{T}, \quad (\text{B.24})$$

avec  $\mathbb{T} = \begin{pmatrix} n_x & n_z \\ n_z & n_x \end{pmatrix}$  et  $\mathbb{D} = \text{diag} (v_p, v_s)$ , et

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\rho v_p v_s} \mathbb{T}'^t \mathbb{D}' \mathbb{T}', \quad (\text{B.25})$$

avec  $\mathbb{T}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 n_x n_z & n_x^2 - n_z^2 & n_x^2 - n_z^2 \\ n_x^2 - n_z^2 & 2 n_x n_z & 2 n_x n_z \end{pmatrix}$  et  $\mathbb{D}' = \text{diag} (v_p, 2 v_s, 0)$ .

En remplaçant ces matrices par leurs valeurs dans les expressions (3.47) et (3.48), nous déduisons que les flux absorbants sur le bord extérieur du domaine sont donnés par

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n - \frac{1}{2} \mathbb{A} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mathbb{B} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n, \quad (\text{B.27})$$

soit en développant,

$$\mathcal{F}_{ik_1}^n = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \left( \omega_i^n + \omega_i'^n \right) n_{x_{ik}} + \sigma_{\mathbf{x}z_i}^n n_{z_{ik}} - \right. \\ \left. \rho \left( (v_s + (v_p - v_s) n_{x_{ik}}^2) \mathbf{v}_{x_i}^{n-\frac{1}{2}} + (v_p - v_s) n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{z_i}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{B.28})$$

$$\mathcal{F}_{ik_2}^n = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \sigma_{\mathbf{x}z_i}^n n_{x_{ik}} + \left( \omega_i^n - \omega_i'^n \right) n_{z_{ik}} - \right. \\ \left. \rho \left( (v_p - v_s) n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{x_i}^{n-\frac{1}{2}} + (v_s + (v_p - v_s) n_{z_{ik}}^2) \mathbf{v}_{z_i}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (\text{B.29})$$

et

$$\mathcal{G}_{ik_1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} - \frac{1}{\rho v_p} \left( \boldsymbol{\omega}_i^n + (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) \boldsymbol{\omega}'_i^n + 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{xz}_i}^n \right) \right] \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ik_2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} - \frac{1}{\rho v_p v_s} \left( (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) \boldsymbol{\omega}_i^n + \right. \right. \\ \left. \left. \left( 4 n_{x_{ik}}^2 n_{z_{ik}}^2 v_p + (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2)^2 v_s \right) \boldsymbol{\omega}'_i^n + 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{xz}_i}^n \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ik_3}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} - \frac{1}{\rho v_p v_s} \left( 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \boldsymbol{\omega}_i^n + \right. \right. \\ \left. \left. 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) \boldsymbol{\omega}'_i^n + \left( 4 n_{x_{ik}}^2 n_{z_{ik}}^2 v_s + (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2)^2 v_p \right) \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{xz}_i}^n \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

### B.1.2.2 Conditions aux limites sur la faille

Le même raisonnement que celui de la section 3.1 permet de conclure que les matrices  $\mathbb{A}_{ik}$ ,  $\mathbb{B}_{ik}$ ,  $\mathbb{C}_{ik}$  et  $\mathbb{D}_{ik}$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{ik} &= (\vec{\mathbf{n}}_{ik} \vec{\mathbf{n}}_{ik}^t - \mathbb{I}_2) \mathbb{P}_{ik}, \\ \mathbb{B}_{ik} &= \vec{\mathbf{n}}_{ik} \vec{\mathbf{n}}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}, \\ \mathbb{C}_{ik} &= \mathbb{Q}_{ik} (\mathbb{I}_2 - \vec{\mathbf{n}}_{ik} \vec{\mathbf{n}}_{ik}^t) \text{ et} \\ \mathbb{D}_{ik} &= \mathbb{Q}_{ik} \vec{\mathbf{n}}_{ik} \vec{\mathbf{n}}_{ik}^t, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{P}_{ik}$  et  $\mathbb{Q}_{ik}$  sont données par

$$\mathbb{P}_{ik} = \begin{pmatrix} n_{x_{ik}} & n_{x_{ik}} & n_{z_{ik}} \\ n_{z_{ik}} & -n_{z_{ik}} & n_{x_{ik}} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{Q}_{ik} = \begin{pmatrix} n_{x_{ik}} & n_{z_{ik}} \\ n_{x_{ik}} & -n_{z_{ik}} \\ n_{z_{ik}} & n_{x_{ik}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les flux sur la faille donnés par (3.1) et (3.2), soit de manière équivalente

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\boldsymbol{\sigma}}_i^n + \frac{1}{2} (\mathbb{A}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\boldsymbol{\sigma}}_i^n + \mathbb{B}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik} \vec{\boldsymbol{\sigma}}_k^n) \quad (\text{B.33})$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{D}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik} \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}}), \quad (\text{B.34})$$

peuvent être explicités en remplaçant les matrices par leurs expressions respectives. Nous obtenons :

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}) \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}) \otimes \mathbb{G}_{ik} \vec{\sigma}_k^n \quad (\text{B.35})$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} (2 \mathbb{I}_2 - \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t) \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\mathbb{Q}_{ik} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t) \otimes \mathbb{G}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.36})$$

Ce qui donne après développement et simplification,

$$\mathcal{F}_{ik_1}^n = \frac{n_{x_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) \quad (\text{B.37})$$

$$\mathcal{F}_{ik_2}^n = \frac{n_{z_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n), \quad (\text{B.38})$$

où  $\zeta$  est la fonction donnée par

$$\begin{aligned} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) = & \mathbb{F}_{ik} \omega_i^n + \mathbb{G}_{ik} \omega_k^n + (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (\mathbb{F}_{ik} \omega_i'^n + \mathbb{G}_{ik} \omega_k'^n) + \\ & 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} (\mathbb{F}_{ik} \sigma_{x_i}^n + \mathbb{G}_{ik} \sigma_{x_k}^n) \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

et

$$\mathcal{G}_{ik_1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{n_{x_{ik}}}{2} (\mathbb{F}_{ik} \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{G}_{ik} \mathbf{v}_{x_k}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{n_{z_{ik}}}{2} (\mathbb{F}_{ik} \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{G}_{ik} \mathbf{v}_{z_k}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ik_2}^{n+\frac{1}{2}} = & \frac{n_{x_{ik}}}{2} \left( (1 + 2 n_{z_{ik}}^2) \mathbb{F}_{ik} \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2 n_{z_{ik}}^2) \mathbb{G}_{ik} \mathbf{v}_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ & - \frac{n_{z_{ik}}}{2} \left( (1 + 2 n_{x_{ik}}^2) \mathbb{F}_{ik} \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2 n_{x_{ik}}^2) \mathbb{G}_{ik} \mathbf{v}_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$\mathcal{G}_{ik_3}^{n+\frac{1}{2}} = n_{z_{ik}} \left( n_{z_{ik}}^2 \mathbb{F}_{ik} \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + n_{x_{ik}}^2 \mathbb{G}_{ik} \mathbf{v}_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) + n_{x_{ik}} \left( n_{x_{ik}}^2 \mathbb{F}_{ik} \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} + n_{z_{ik}}^2 \mathbb{G}_{ik} \mathbf{v}_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{B.42})$$

Les expressions (B.37) et (B.38) du flux  $\mathcal{F}_{ik}$  ainsi donnée ne sont valables que dans le cas où les conditions aux limites sur la faille sont homogènes (c'est-à-dire pour  $g = 0$ ). Dans le cas non homogène, la condition aux limites (1.11) implique l'addition de la composante tangentielle des tractions (pour le mode cisailant) exercées sur la faille. En reprenant l'expression (3.12), nous obtenons :

$$\mathcal{F}_{ik_1}^n = \frac{n_{x_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) + \mathbf{T}_{ik_{T_1}}^n \quad (\text{B.43})$$

$$\mathcal{F}_{ik_2}^n = \frac{n_{z_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) + \mathbf{T}_{ik_{T_2}}^n \quad (\text{B.44})$$

où  $\vec{T}_{ik_T}$  est donné par (3.27).

La déduction du vecteur  $\vec{T}_{ik_T}$  nécessite le calcul de la discontinuité de la vitesse tangentielle  $\vec{v}_T$  et de la composante tangentielle de la quantité  $\vec{R}_T$  définie en (3.32). Ces dernières peuvent être calculées en utilisant la formule

$$\Theta_T = \Theta - (\Theta \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (\text{B.45})$$

Dans le cas particulier d'un schéma volumes finis, nous avons par (3.26) :

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \frac{\rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)} \left( -\llbracket \vec{v}_T^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket - \vec{R}_{i_T}^n + \vec{R}_{k_T}^n \right). \quad (\text{B.46})$$

Or

$$\begin{aligned} \vec{v}_T &= (\mathbb{I}_2 - \vec{n} \otimes \vec{n}) \vec{v} \\ &= (n_z v_x - n_x v_z) \begin{pmatrix} n_z \\ -n_x \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

donc

$$\llbracket \vec{v}_T^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket = \left[ n_{z_{ik}} \left( v_{x_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{x_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) - n_{x_{ik}} \left( v_{z_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{z_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \begin{pmatrix} n_{z_{ik}} \\ -n_{x_{ik}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.48})$$

De la même façon, et par l'équation (3.22), nous pouvons déduire

$$\vec{R}_{i_T}^n = \alpha_i \begin{pmatrix} n_{z_{ik}} \\ -n_{x_{ik}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.49})$$

$$\vec{R}_{k_T}^n = \alpha_k \begin{pmatrix} n_{z_{ik}} \\ -n_{x_{ik}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.50})$$

avec

$$\alpha_i = \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{j \in V(i) \\ \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j \not\subset \Gamma}} S_{ij} \left( n_{z_{ik}} \left[ (\omega_{[ij]}^n + \omega'_{[ij]}^n) n_{x_{ij}} + \sigma_{xz[ij]}^n n_{z_{ij}} \right] - n_{x_{ik}} \left[ \sigma_{xz[ij]}^n n_{x_{ij}} + (\omega_{[ij]}^n - \omega'_{[ij]}^n) n_{z_{ij}} \right] \right) \quad (\text{B.51})$$

et

$$\alpha_k = \frac{\Delta t}{\rho_k V_k} \sum_{\substack{j \in V(k) \\ \mathcal{T}_k \cap \mathcal{T}_j \not\subset \Gamma}} S_{kj} \left( n_{z_{ik}} \left[ (\omega_{[kj]}^n + \omega'_{[kj]}^n) n_{x_{kj}} + \sigma_{xz[kj]}^n n_{z_{kj}} \right] - n_{x_{ik}} \left[ \sigma_{xz[kj]}^n n_{x_{kj}} + (\omega_{[kj]}^n - \omega'_{[kj]}^n) n_{z_{kj}} \right] \right), \quad (\text{B.52})$$

avec la notation

$$\Theta_{[rs]}^n := \frac{\Theta_r^n + \Theta_s^n}{2} \quad \text{pour } \Theta = \omega, \omega' \text{ et } \sigma_{xz}.$$

Finalement, l'expression de  $\mathcal{F}_{ik_T}^n$  découle de (3.26) et (3.27).

## B.2 Cas tridimensionnel

En trois dimensions d'espace, le système de l'élastodynamique en formulation contraintes-vitesses s'écrit :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.53})$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \quad (\text{B.54})$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (\text{B.55})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.56})$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (\text{B.60})$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial y} + \mu \frac{\partial v_y}{\partial z} . \quad (\text{B.61})$$

Ce système peut être transformé en un système hyperbolique pseudo-conservatif, en introduisant les variables :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \omega' &= \frac{1}{3} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \\ \omega'' &= \frac{1}{3} (-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) . \end{aligned}$$



Nous obtenons alors le système suivant :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial (\omega + \omega')}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.62})$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial (\omega + \omega'')}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \quad (\text{B.63})$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial (\omega - \omega' - \omega'')}{\partial z} \quad (\text{B.64})$$

$$\frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{3}{2\mu} \frac{\partial \omega'}{\partial t} = 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.66})$$

$$\frac{3}{2\mu} \frac{\partial \omega''}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.67})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (\text{B.68})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (\text{B.69})$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial y} + \mu \frac{\partial v_y}{\partial z} . \quad (\text{B.70})$$

Comme nous l'avons précédemment souligné, ce système n'est pas symétrique, mais symétrisable via la multiplication par une matrice constante  $\mathbb{S}_0$  (voir section 2.3.2). Néanmoins, cette procédure de symétrisation n'intervient que pour simplifier les calculs de l'énergie. Les deux systèmes (2.15) et (2.22) (c'est-à-dire sans et avec multiplication par  $\mathbb{S}_0$ ) étant équivalents, nous avons opté pour l'implémentation du système (B.62)-(B.70) afin d'éviter de manipuler la matrice non diagonale  $\mathbb{S}_0$ . Dans la suite, nous donnerons donc les flux relatifs au système (B.62)-(B.70).

### B.2.1 Schéma discret

En adoptant les notations des sections 2.4 et 2.5, et en suivant un raisonnement analogue, nous pouvons déduire que le système discret, avec des flux centré en espace et un

schéma saute-mouton en temps, s'écrit

$$\begin{aligned}
 \rho_i \mathbb{K}_i \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x (\omega_i^n + \omega_i'^n) - \mathbb{E}_y \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n - \mathbb{E}_z \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ (\omega_i^n + \omega_i'^n) n_{x_{ik}} + \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n n_{y_{ik}} + \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n n_{z_{ik}} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ (\omega_k^n + \omega_k'^n) n_{x_{ik}} + \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_k}^n n_{y_{ik}} + \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_k}^n n_{z_{ik}} \right]
 \end{aligned} \tag{B.71}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_i \mathbb{K}_i \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n - \mathbb{E}_y (\omega_i^n + \omega_i''^n) - \mathbb{E}_z \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n n_{x_{ik}} + (\omega_i^n + \omega_i''^n) n_{y_{ik}} + \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n n_{z_{ik}} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_k}^n n_{x_{ik}} + (\omega_k^n + \omega_k''^n) n_{y_{ik}} + \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_k}^n n_{z_{ik}} \right]
 \end{aligned} \tag{B.72}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_i \mathbb{K}_i \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n - \mathbb{E}_y \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n - \mathbb{E}_z (\omega_i^n - \omega_i'^n - \omega_i''^n) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n n_{x_{ik}} + \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n n_{y_{ik}} + (\omega_i^n - \omega_i'^n - \omega_i''^n) n_{z_{ik}} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_k}^n n_{x_{ik}} + \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_k}^n n_{y_{ik}} + (\omega_k^n - \omega_k'^n - \omega_k''^n) n_{z_{ik}} \right]
 \end{aligned} \tag{B.73}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{3\lambda_i + 2\mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{E}_y \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{E}_z \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{x}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{y}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right]
 \end{aligned} \tag{B.74}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2\mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\omega_i'^{n+1} - \omega_i'^n}{\Delta t} &= -2\mathbb{E}_x \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{E}_y \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{E}_z \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ 2\mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ 2\mathbf{v}_{\mathbf{x}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{y}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right]
 \end{aligned} \tag{B.75}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2\mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} &= \mathbb{E}_x \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} - 2\mathbb{E}_y \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{E}_z \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ -\mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + 2\mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} - \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ -\mathbf{v}_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + 2\mathbf{v}_{y_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} - \mathbf{v}_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.76})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\sigma_{xy_i}^{n+1} - \sigma_{xy_i}^n}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{E}_y \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{y_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} \right] \quad (\text{B.77})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\sigma_{xz_i}^{n+1} - \sigma_{xz_i}^n}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_x \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{E}_z \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.78})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_i} \mathbb{K}_i \frac{\sigma_{yz_i}^{n+1} - \sigma_{yz_i}^n}{\Delta t} &= -\mathbb{E}_y \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{E}_z \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} + \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} \mathbb{G}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} + \mathbf{v}_{y_k}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} \right]. \quad (\text{B.79})
 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un schéma volumes finis (c'est-à-dire DG- $\mathbb{P}_0$ ), ce système se simplifie encore puisque nous avons les égalités (voir section 2.6),

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K}_i &= V_i \\
 \mathbb{E}_\alpha &= 0 \quad \forall \alpha \in \{x, z\} \\
 \mathbb{F}_{ik} &= \mathbb{G}_{ik} = S_{ik} \quad \forall k \in V(i),
 \end{aligned}$$

## Annexe B

où  $V_i$  est le volume de la cellule  $\mathcal{T}_i$  et  $S_{ik}$  est la surface de l'interface  $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$ . Ainsi, nous obtenons le système suivant :

$$\rho_i V_i \frac{v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} - v_{x_i}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ (\omega_i^n + \omega_k^n + \omega_i'^n + \omega_k'^n) n_{x_{ik}} + (\sigma_{xy_i}^n + \sigma_{xy_k}^n) n_{y_{ik}} + (\sigma_{xz_i}^n + \sigma_{xz_k}^n) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.80})$$

$$\rho_i V_i \frac{v_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} - v_{y_i}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ (\sigma_{xy_i}^n + \sigma_{xy_k}^n) n_{x_{ik}} + (\omega_i^n + \omega_k^n + \omega_i''^n + \omega_k''^n) n_{y_{ik}} + (\sigma_{yz_i}^n + \sigma_{yz_k}^n) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.81})$$

$$\rho_i V_i \frac{v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} - v_{z_i}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ (\sigma_{xz_i}^n + \sigma_{xz_k}^n) n_{x_{ik}} + (\sigma_{yz_i}^n + \sigma_{yz_k}^n) n_{y_{ik}} + (\omega_i^n + \omega_k^n - \omega_i'^n - \omega_k'^n - \omega_i''^n - \omega_k''^n) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.82})$$

$$\frac{3}{3\lambda_i + 2\mu_i} V_i \frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ \left( v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{x_{ik}} + \left( v_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{y_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{y_{ik}} + \left( v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.83})$$

$$\frac{3}{2\mu_i} V_i \frac{\omega_i'^{n+1} - \omega_i'^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ 2 \left( v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{x_{ik}} - \left( v_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{y_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{y_{ik}} - \left( v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.84})$$

$$\frac{3}{2\mu_i} V_i \frac{\omega_i''^{n+1} - \omega_i''^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ - \left( v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{x_{ik}} + 2 \left( v_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{y_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{y_{ik}} - \left( v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.85})$$

$$\frac{1}{\mu_i} V_i \frac{\sigma_{xy_i}^{n+1} - \sigma_{xy_i}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ \left( v_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{y_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{x_{ik}} + \left( v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{y_{ik}} \right] \quad (\text{B.86})$$

$$\frac{1}{\mu_i} V_i \frac{\sigma_{xz_i}^{n+1} - \sigma_{xz_i}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ \left( v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{x_{ik}} + \left( v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{z_{ik}} \right] \quad (\text{B.87})$$

$$\frac{1}{\mu_i} V_i \frac{\sigma_{yz_i}^{n+1} - \sigma_{yz_i}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in V(i)} S_{ik} \left[ \left( v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{z_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{y_{ik}} + \left( v_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} + v_{y_k}^{n+\frac{1}{2}} \right) n_{z_{ik}} \right] . \quad (\text{B.88})$$

## B.2.2 Conditions aux limites

### B.2.2.1 Conditions aux limites absorbantes

Dans l'annexe A, nous avons calculé les matrices relatives aux flux absorbants. En remplaçant ces matrices par leurs valeurs dans les expressions (3.47) et (3.48), nous déduisons que les flux absorbants sur le bord extérieur du domaine sont donnés par

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n - \frac{1}{2} \mathbb{A} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.89})$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mathbb{B} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n. \quad (\text{B.90})$$

**Remarque B.2.1** *Étant donné que nous cherchons ces flux pour le système (2.15) et non pas pour le système (2.22) (c'est-à-dire sans symétrisation), alors il faut multiplier le système (B.89)-(B.90) par  $\mathbb{S}_0^{-1}$ . D'autre part, si nous notons*

$$\mathbb{S}_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_{3,6} \\ \mathbb{O}_{6,3} & \bar{\mathbb{S}}_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.91})$$

avec

$$\bar{\mathbb{S}}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.92})$$

alors nous avons

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{ik}^n \\ \mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \mathbb{S}_0^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{ik}^n \\ \tilde{\mathcal{G}}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{ik}^n \\ \bar{\mathbb{S}}_0^{-1} \tilde{\mathcal{G}}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.93})$$

Ainsi, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n - \frac{1}{2} \mathbb{A} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.94})$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbb{S}}_0^{-1} \mathbb{Q}_{ik}) \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\bar{\mathbb{S}}_0^{-1} \mathbb{B}) \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n, \quad (\text{B.95})$$

soit après développement et simplification,

$$\mathcal{F}_{ik_1}^n = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \left( \omega_i^n + \omega_i'^n \right) n_{x_{ik}} + \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n n_{y_{ik}} + \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n n_{z_{ik}} - \right. \\ \left. \rho \left( \left( v_s + (v_p - v_s) n_{x_{ik}}^2 \right) \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n-\frac{1}{2}} + (v_p - v_s) n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n-\frac{1}{2}} + (v_p - v_s) n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{B.96})$$

$$\mathcal{F}_{ik_2}^n = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n n_{x_{ik}} + \left( \omega_i^n + \omega_i''^n \right) n_{y_{ik}} + \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n n_{z_{ik}} - \right. \\ \left. \rho \left( (v_p - v_s) n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n-\frac{1}{2}} + \left( v_s + (v_p - v_s) n_{y_{ik}}^2 \right) \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n-\frac{1}{2}} + (v_p - v_s) n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{B.97})$$

$$\mathcal{F}_{ik_3}^n = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n n_{x_{ik}} + \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n n_{y_{ik}} + \left( \omega_i^n - \omega_i'^n - \omega_i''^n \right) n_{z_{ik}} - \right. \\ \left. \rho \left( (v_p - v_s) n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n-\frac{1}{2}} + (v_p - v_s) n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n-\frac{1}{2}} + \left( v_s + (v_p - v_s) n_{z_{ik}}^2 \right) \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (\text{B.98})$$

et

$$\mathcal{G}_{ik_1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} - \right. \\ \left. \frac{1}{\rho v_p} \left( \omega_i^n + (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) \omega_i'^n + (n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) \omega_i''^n \right. \right. \\ \left. \left. + 2 n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n + 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n + 2 n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n \right) \right] \quad (\text{B.99})$$

$$\mathcal{G}_{ik_2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ 2 \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} - \right. \\ \left. \frac{1}{\rho v_p v_s} \left( (2 n_{x_{ik}}^2 - n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) v_s \omega_i^n + \right. \right. \\ \left. \left( (2 n_{x_{ik}}^2 + n_{z_{ik}}^2) v_p + (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (2 n_{x_{ik}}^2 - n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) \right) \omega_i'^n + \right. \\ \left. (n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) [(2 n_{x_{ik}}^2 - n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) - v_p] \omega_i''^n + \right. \\ \left. n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} [2 (2 n_{x_{ik}}^2 - n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) + v_p] \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n + \right. \\ \left. n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} [2 (2 n_{x_{ik}}^2 - n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) + v_p] \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n + \right. \\ \left. 2 n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} [(2 n_{x_{ik}}^2 - n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) - v_p] \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n \right) \right] \quad (\text{B.100})$$

$$\mathcal{G}_{ik_3}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ - \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + 2 \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} - \right. \\ \left. \frac{1}{\rho v_p v_s} \left( (-n_{x_{ik}}^2 + 2 n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) v_s \omega_i^n + \right. \right. \\ \left. (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) [(-n_{x_{ik}}^2 + 2 n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) - v_p] \omega_i'^n + \right. \\ \left. ((2 n_{y_{ik}}^2 + n_{z_{ik}}^2) v_p + (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (-n_{x_{ik}}^2 + 2 n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p)) \omega_i''^n + \right. \\ \left. n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} [2 (-n_{x_{ik}}^2 + 2 n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) + v_p] \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n + \right. \\ \left. 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} [(-n_{x_{ik}}^2 + 2 n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) - v_p] \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n + \right. \\ \left. n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} [2 (-n_{x_{ik}}^2 + 2 n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) + v_p] \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n \right) \right] \quad (\text{B.101})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ik_4}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} - \frac{1}{\rho v_p v_s} \left( 2 n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} v_s \boldsymbol{\omega}_i^n + \right. \right. \\ n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} \left[ 2 (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) + v_p \right] \boldsymbol{\omega}_i'^n + \\ n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} \left[ 2 (n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) + v_p \right] \boldsymbol{\omega}_i''^n + \\ \left[ 4 n_{x_{ik}}^2 n_{y_{ik}}^2 (v_s - v_p) + (n_{x_{ik}}^2 + n_{y_{ik}}^2) v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n + \\ n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} \left[ 4 n_{x_{ik}}^2 (v_s - v_p) + v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n + \\ \left. \left. n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \left[ 4 n_{y_{ik}}^2 (v_s - v_p) + v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ik_5}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{x_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} - \frac{1}{\rho v_p v_s} \left( 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} v_s \boldsymbol{\omega}_i^n + \right. \right. \\ 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) \boldsymbol{\omega}_i'^n + \\ n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \left[ 2 (n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) - v_p \right] \boldsymbol{\omega}_i''^n + \\ n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} \left[ 4 n_{x_{ik}}^2 (v_s - v_p) + v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n + \\ \left[ 4 n_{x_{ik}}^2 n_{z_{ik}}^2 (v_s - v_p) + (n_{x_{ik}}^2 + n_{z_{ik}}^2) v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n + \\ \left. \left. n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} \left[ 4 n_{z_{ik}}^2 (v_s - v_p) + v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.103})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ik_6}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ik} \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{y_{ik}} + \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i}^{n+\frac{1}{2}} n_{z_{ik}} - \frac{1}{\rho v_p v_s} \left( 2 n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} v_s \boldsymbol{\omega}_i^n + \right. \right. \\ n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} \left[ 2 (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) - v_p \right] \boldsymbol{\omega}_i'^n + \\ 2 n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} (n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (v_s - v_p) \boldsymbol{\omega}_i''^n + \\ n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \left[ 4 n_{y_{ik}}^2 (v_s - v_p) + v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{y}_i}^n + \\ n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} \left[ 4 n_{z_{ik}}^2 (v_s - v_p) + v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{z}_i}^n + \\ \left. \left. \left[ 4 n_{y_{ik}}^2 n_{z_{ik}}^2 (v_s - v_p) + (n_{y_{ik}}^2 + n_{z_{ik}}^2) v_p \right] \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}\mathbf{z}_i}^n \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.104})$$



### B.2.2.2 Conditions aux limites sur la faille

Dans la section 3.1, nous avons vu que les matrices  $\mathbb{A}_{ik}$ ,  $\mathbb{B}_{ik}$ ,  $\mathbb{C}_{ik}$  et  $\mathbb{D}_{ik}$  s'écrivent

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{ik} &= (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t - \mathbb{I}_3) \mathbb{P}_{ik}, \\ \mathbb{B}_{ik} &= \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}, \\ \mathbb{C}_{ik} &= \mathbb{Q}_{ik} (\mathbb{I}_3 - \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t) \text{ et} \\ \mathbb{D}_{ik} &= \mathbb{Q}_{ik} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t,\end{aligned}$$

où  $\mathbb{P}_{ik}$  et  $\mathbb{Q}_{ik}$  sont données par

$$\mathbb{P}_{ik} = \begin{pmatrix} n_{x_{ik}} & n_{x_{ik}} & 0 & n_{y_{ik}} & n_{z_{ik}} & 0 \\ n_{y_{ik}} & 0 & n_{y_{ik}} & n_{x_{ik}} & 0 & n_{z_{ik}} \\ n_{z_{ik}} & -n_{z_{ik}} & -n_{z_{ik}} & 0 & n_{x_{ik}} & n_{y_{ik}} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{Q}_{ik} = \begin{pmatrix} n_{x_{ik}} & n_{y_{ik}} & n_{z_{ik}} \\ n_{x_{ik}} & 0 & -n_{z_{ik}} \\ 0 & n_{y_{ik}} & -n_{z_{ik}} \\ n_{y_{ik}} & n_{x_{ik}} & 0 \\ n_{z_{ik}} & 0 & n_{x_{ik}} \\ 0 & n_{z_{ik}} & n_{y_{ik}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les flux sur la faille donnés par (3.1) et (3.2), soit de manière équivalente,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ik}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} (\mathbb{A}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \mathbb{B}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik} \vec{\sigma}_k^n) \quad (\text{B.105})$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{ik} \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{D}_{ik} \otimes \mathbb{G}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}), \quad (\text{B.106})$$

peuvent être explicités en remplaçant les matrices par leurs expressions respectives. Nous obtenons :

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ik}^n = \frac{1}{2} (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}) \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}) \otimes \mathbb{G}_{ik} \vec{\sigma}_k^n \quad (\text{B.107})$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ik} (2\mathbb{I}_3 - \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t) \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\mathbb{Q}_{ik} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t) \otimes \mathbb{G}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.108})$$

et par la remarque B.2.2.1, nous avons :

$$\mathcal{F}_{ik}^n = \frac{1}{2} (\vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t \mathbb{P}_{ik}) \otimes (\mathbb{F}_{ik} \vec{\sigma}_i^n + \mathbb{G}_{ik} \vec{\sigma}_k^n) \quad (\text{B.109})$$

$$\mathcal{G}_{ik}^{n+\frac{1}{2}} = (\bar{\mathbb{S}}_0^{-1} \mathbb{Q}_{ik}) \otimes \mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\bar{\mathbb{S}}_0^{-1} \mathbb{Q}_{ik} \vec{n}_{ik} \vec{n}_{ik}^t) \otimes (\mathbb{F}_{ik} \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{G}_{ik} \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}). \quad (\text{B.110})$$

## Annexe B

Ce qui donne après développement et simplification,

$$\mathcal{F}_{ik_1}^n = \frac{n_{x_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) \quad (\text{B.111})$$

$$\mathcal{F}_{ik_2}^n = \frac{n_{y_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) \quad (\text{B.112})$$

$$\mathcal{F}_{ik_3}^n = \frac{n_{z_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n), \quad (\text{B.113})$$

où  $\zeta$  est la fonction donnée par

$$\begin{aligned} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) = & \mathbb{F}_{ik} \omega_i^n + \mathbb{G}_{ik} \omega_k^n + (n_{x_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (\mathbb{F}_{ik} \omega_i'^n + \mathbb{G}_{ik} \omega_k'^n) + \\ & (n_{y_{ik}}^2 - n_{z_{ik}}^2) (\mathbb{F}_{ik} \omega_i''^n + \mathbb{G}_{ik} \omega_k''^n) + 2 n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} (\mathbb{F}_{ik} \sigma_{xy_i}^n + \mathbb{G}_{ik} \sigma_{xy_k}^n) + \\ & 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} (\mathbb{F}_{ik} \sigma_{xz_i}^n + \mathbb{G}_{ik} \sigma_{xz_k}^n) + 2 n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} (\mathbb{F}_{ik} \sigma_{yz_i}^n + \mathbb{G}_{ik} \sigma_{yz_k}^n), \end{aligned} \quad (\text{B.114})$$

et

$$\mathcal{G}_{ik_1}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_{ik} \left( n_{x_{ik}} \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + n_{y_{ik}} \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} + n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \xi \left( \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.115})$$

$$\mathcal{G}_{ik_2}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_{ik} \left( 2 n_{x_{ik}} \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} - n_{y_{ik}} \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} - n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \right) - (3 n_{x_{ik}}^2 - 1) \xi \left( \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.116})$$

$$\mathcal{G}_{ik_3}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_{ik} \left( -n_{x_{ik}} \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + 2 n_{y_{ik}} \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} - n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \right) - (3 n_{y_{ik}}^2 - 1) \xi \left( \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.117})$$

$$\mathcal{G}_{ik_4}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_{ik} \left( n_{y_{ik}} \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + n_{x_{ik}} \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} \right) - 2 n_{x_{ik}} n_{y_{ik}} \xi \left( \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.118})$$

$$\mathcal{G}_{ik_5}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_{ik} \left( n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + n_{x_{ik}} \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \right) - 2 n_{x_{ik}} n_{z_{ik}} \xi \left( \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.119})$$

$$\mathcal{G}_{ik_6}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_{ik} \left( n_{z_{ik}} \mathbf{v}_{y_i}^{n+\frac{1}{2}} + n_{y_{ik}} \mathbf{v}_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \right) - 2 n_{y_{ik}} n_{z_{ik}} \xi \left( \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (\text{B.120})$$

où  $\xi$  est la fonction donnée par

$$\xi \left( \vec{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \vec{\mathbf{v}}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \frac{n_{ik\alpha}}{2} \left( \mathbb{F}_{ik} \mathbf{v}_{\alpha_i}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{G}_{ik} \mathbf{v}_{\alpha_k}^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{B.121})$$

Les expressions (B.111), (B.112) et (B.113) du flux  $\mathcal{F}_{ik}$  ainsi données ne sont valable que dans le cas où les conditions aux limites sur la faille sont homogènes (c'est-à-dire pour  $g = 0$ ). Dans le cas non homogène, la condition aux limites (1.11) implique l'addition de la composante tangentielle des tractions (pour le mode cisailant) exercées sur la faille. En reprenant l'expression (3.12), nous obtenons :

$$\mathcal{F}_{ik_1}^n = \frac{n_{x_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) + \mathbf{T}_{ik_{T_1}}^n \quad (\text{B.122})$$

$$\mathcal{F}_{ik_2}^n = \frac{n_{y_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) + \mathbf{T}_{ik_{T_2}}^n \quad (\text{B.123})$$

$$\mathcal{F}_{ik_3}^n = \frac{n_{z_{ik}}}{2} \zeta(\vec{\sigma}_i^n, \vec{\sigma}_k^n) + \mathbf{T}_{ik_{T_3}}^n. \quad (\text{B.124})$$

La déduction de  $\vec{T}_{ik_T}$  nécessite le calcul de la discontinuité de la vitesse tangentielle  $\vec{v}_T$  et de la composante tangentielle de la quantité  $\vec{R}_T$  définie en (3.32). Ces dernières peuvent être calculées en utilisant la formule

$$\Theta_T = \Theta - (\Theta \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (\text{B.125})$$

Dans le cas particulier d'un schéma volumes finis, nous avons par (3.26),

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \frac{\rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)} \left( -\llbracket \vec{v}_T^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket - \vec{R}_{i_T}^n + \vec{R}_{k_T}^n \right). \quad (\text{B.126})$$

Or

$$\begin{aligned} \vec{v}_T &= (\mathbb{I}_3 - \vec{n} \otimes \vec{n}) \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - n_x^2) v_x - n_x (n_y v_y + n_z v_z) \\ (1 - n_y^2) v_y - n_y (n_x v_x + n_z v_z) \\ (1 - n_z^2) v_z - n_z (n_x v_x + n_y v_y) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.127})$$

donc

$$\llbracket \vec{v}_T^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket = \begin{pmatrix} (1 - n_{x_{ik}}^2) \left( v_{x_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{x_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) - n_{x_{ik}} \left[ n_{y_{ik}} \left( v_{y_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{y_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) + n_{z_{ik}} \left( v_{z_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{z_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ (1 - n_{y_{ik}}^2) \left( v_{y_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{y_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) - n_{y_{ik}} \left[ n_{x_{ik}} \left( v_{x_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{x_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) + n_{z_{ik}} \left( v_{z_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{z_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ (1 - n_{z_{ik}}^2) \left( v_{z_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{z_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) - n_{z_{ik}} \left[ n_{x_{ik}} \left( v_{x_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{x_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) + n_{y_{ik}} \left( v_{y_i}^{n-\frac{1}{2}} - v_{y_k}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] \end{pmatrix}. \quad (\text{B.128})$$

De la même façon, et par l'équation (3.22), nous pouvons déduire

$$\vec{R}_{i_T}^n = \frac{\Delta t}{\rho_i V_i} \sum_{\substack{j \in V(i) \\ \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j \not\subset \Gamma}} S_{ij} \begin{pmatrix} R_{T_{ij1}}^n \\ R_{T_{ij2}}^n \\ R_{T_{ij3}}^n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.129})$$

avec

$$\begin{aligned}
R_{T_{ij1}}^n = & (1 - n_{x_{ik}}^2) \left( (\omega_{[ij]}^n + \omega'_{[ij]} n) n_{x_{ij}} + \sigma_{xy[ij]}^n n_{y_{ij}} + \sigma_{xz[ij]}^n n_{z_{ij}} \right) \\
& - n_{x_{ik}} \left[ n_{y_{ik}} \left( \sigma_{xy[ij]}^n n_{x_{ij}} + (\omega_{[ij]}^n + \omega''_{[ij]} n) n_{y_{ik}} + \sigma_{yz[ij]}^n n_{z_{ij}} \right) \right. \\
& \quad \left. + n_{z_{ik}} \left( \sigma_{xz[ij]}^n n_{x_{ij}} + \sigma_{yz[ij]}^n n_{y_{ij}} + (\omega_{[ij]}^n - \omega'_{[ij]} n - \omega''_{[ij]} n) n_{z_{ij}} \right) \right] \quad (B.130)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{T_{ij2}}^n = & (1 - n_{y_{ik}}^2) \left( \sigma_{xy[ij]}^n n_{x_{ij}} + (\omega_{[ij]}^n + \omega''_{[ij]} n) n_{y_{ik}} + \sigma_{yz[ij]}^n n_{z_{ij}} \right) \\
& - n_{y_{ik}} \left[ n_{x_{ik}} \left( \omega_{[ij]}^n + \omega'_{[ij]} n \right) n_{x_{ij}} + \sigma_{xy[ij]}^n n_{y_{ij}} + \sigma_{xz[ij]}^n n_{z_{ij}} \right. \\
& \quad \left. + n_{z_{ik}} \left( \sigma_{xz[ij]}^n n_{x_{ij}} + \sigma_{yz[ij]}^n n_{y_{ij}} + (\omega_{[ij]}^n - \omega'_{[ij]} n - \omega''_{[ij]} n) n_{z_{ij}} \right) \right] \quad (B.131)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{T_{ij3}}^n = & (1 - n_{z_{ik}}^2) \left( \sigma_{xz[ij]}^n n_{x_{ij}} + \sigma_{yz[ij]}^n n_{y_{ij}} + (\omega_{[ij]}^n - \omega'_{[ij]} n - \omega''_{[ij]} n) n_{z_{ij}} \right) \\
& - n_{z_{ik}} \left[ n_{x_{ik}} \left( \omega_{[ij]}^n + \omega'_{[ij]} n \right) n_{x_{ij}} + \sigma_{xy[ij]}^n n_{y_{ij}} + \sigma_{xz[ij]}^n n_{z_{ij}} \right. \\
& \quad \left. + n_{y_{ik}} \left( \sigma_{xy[ij]}^n n_{x_{ij}} + (\omega_{[ij]}^n + \omega''_{[ij]} n) n_{y_{ik}} + \sigma_{yz[ij]}^n n_{z_{ij}} \right) \right], \quad (B.132)
\end{aligned}$$

(idem pour  $\vec{R}_{k_T}^n$  en remplaçant l'indice  $ij$  par  $kj$ ), avec la notation

$$\Theta_{[rs]}^n := \frac{\Theta_r^n + \Theta_s^n}{2} \quad \text{pour } \Theta = \omega, \omega', \omega'', \sigma_{xy}, \sigma_{xz} \text{ et } \sigma_{yz}.$$

Finalement, l'expression de  $\mathcal{F}_{ik_T}^n$  découle de (3.26) et (3.27).

## B.3 Algorithme

L'algorithme que nous utilisons est assez simple et explicite en tout pas de temps. Si l'on se place à un instant  $n$  où l'on suppose connu les vitesses à l'instant  $n - \frac{1}{2}$  et le glissement et les contraintes à l'instant  $n$ , alors l'algorithme est donné par :

1. Calcul des vitesses à l'instant  $n + \frac{1}{2}$  via l'équation (2.72), en prenant en compte les flux à travers la faille donnés par (3.2).
2. Calcul du déplacement tangentiel à la faille à l'instant  $n + 1$  via l'équation (3.19).
3. Calcul des tractions fictives  $\vec{T}_T$  sur la faille à l'instant  $n + 1$  via l'équation (3.26).
4. Dédution des tractions (3.27) et des flux (3.29) à travers la faille.

5. Calcul des contraintes à l'instant  $n + 1$  via l'équation (2.73).

Cet algorithme ne nécessite pas l'introduction d'un schéma prédicteur correcteur lors de l'évaluation des tractions sur la faille, et peut être adapté de façon naturelle à d'autres lois de frottement.

## Annexe C

# Valorisation des compétences

Ce chapitre a été réalisé dans le cadre d'une formation dispensée et validée par l'ABG (Association Bernard Gregory).



Université de Nice Sophia-Antipolis  
École doctorale : SFA  
Laboratoire d'accueil : INRIA Sophia Antipolis  
Spécialité : Mathématiques appliquées

*Valorisation des compétences  
« Un nouveau chapitre de la thèse »*

*ÉTUDE ET SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA RUPTURE  
DYNAMIQUE DES SÉISMES PAR DES MÉTHODES  
D'ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS*

Par

*Mondher Benjema*

Mentor

**Nadjia Hohweiller**

Directeurs de thèse

**Serge Piperno & Jean Virieux**

Date probable de soutenance : Novembre 2007



# 1. Cadre général, enjeux et présentation du projet de recherche

## 1.1 Présentation de la thèse

Cette thèse s'intitule « Étude et simulation numérique de la rupture dynamique des séismes par des méthodes éléments finis discontinus ». Elle traite un sujet fondamental en sismologie qui est la physique de la rupture d'un séisme, et plus précisément, la propagation de failles de géométries complexes dans des milieux hétérogènes.

La modélisation de la rupture d'un séisme à des échelles réalistes est un problème difficile. L'élaboration de méthodes numériques, appuyées par des performances de plus en plus croissantes des machines de calculs, a permis des avancées considérables dans la compréhension du phénomène des tremblements de terre. Ces méthodes numériques sont d'autant plus précises lorsqu'elles permettent de prendre en considération les différents paramètres physiques mis en jeu lors d'un séisme, tels que la géométrie des failles, l'hétérogénéité du milieu, les lois de frottement qui gouvernent la rupture, etc.

Le but de cette thèse a été d'assimiler dans un premier temps le problème physique de la dynamique de la rupture et de développer ensuite un modèle numérique permettant la simulation de la rupture des séismes en tenant compte au mieux des paramètres cités ci-dessus. L'outil de modélisation développé permet donc d'étudier des configurations réalistes du phénomène des séismes, mais aussi de propager les ondes qui en sont générées et qui atteignent la surface de la terre. Ce sont en fait ces ondes qui sont le plus souvent responsables des dégâts matériels et donc humains survenant lors des tremblements de terre. Leur bonne compréhension est donc nécessaire voire indispensable afin d'établir ou d'améliorer les normes de construction parasismiques.

## 1.2 Contexte de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le projet CAIMAN « Calcul scientifique, Modélisation et Analyse Numérique », qui est un projet commun entre l'INRIA Sophia Antipolis et l'ENPC, et le projet DRO « Déformation active, Rupture et Ondes » de l'unité de recherche GÉOSCIENCES AZUR. Le thème de cette thèse constitue un des deux axes principaux de recherche de l'équipe CAIMAN que sont l'élastodynamique, dans lequel j'interviens, et l'électromagnétisme.

À l'échelle internationale, cette thèse peut être considérée comme une innovation. En effet, la simulation numérique des ruptures a été largement étudiée depuis les trois dernières décennies, par des méthodes de types différences finies (FDM) et des méthodes de types éléments finis continus (FEM), mais peu, à notre connaissance, par des méthodes de types éléments finis discontinus, appelées aussi méthodes Galerkin discontinus (DGM). L'avantage de ces dernières par rapport aux méthodes différences finies est qu'elles permettent une flexibilité au niveau du maillage assurant ainsi une meilleure prise en compte des géométries complexes des failles. En effet, plusieurs études récentes ont montré que la géométrie de la faille joue un rôle important dans la propagation de la rupture et peut ainsi modifier considérablement les champs rayonnés, et le comportement même de la rupture. Leur avantage par rapport aux méthodes éléments finis continus est qu'elles sont « locales » et ne nécessitent donc pas la résolution de systèmes de très grandes tailles, ce qui permet un gain en espace mémoire et en temps de calcul. D'autre part, le caractère discontinu des méthodes DGM leur procure une meilleure prise en compte des discontinuités des champs au voisinage de la faille, ce qui ne se fait pas de manière naturelle pour les méthodes FEM continus.

En raison du caractère numérique de la thèse, les ressources techniques nécessaires pour son bon déroulement ont été toujours à ma disposition : un ordinateur personnel biprocesseurs

à 3.6 GHz (Linux/Windows), un parc matériel de 11 PC Linux en réseau local, dont la plupart sont à 3 GHz, un cluster de 188 processeurs, dont 14 machines à base de bi-PentiumIII 1.2 GHz en Fast Ethernet, 16 machines à base de bi-Xeon en Gigabit Ethernet, et 64 machines à base de bi-Opteron en Gigabit Ethernet. En ce qui concerne les ressources humaines, j'ai fait parti d'une équipe composée de treize personnes, dont six permanents ; Stéphane Lanteri et Loula Fezoui (directeurs de recherche INRIA), quatre collaborateurs extérieurs ; Serge Piperno (mon directeur de thèse, et actuellement directeur du CERMICS), Nathalie Glinsky-Olivier (chargée de recherche), Victorita Dolean et Fransesca Rapetti (maîtres de conférence UNSA), cinq doctorants ; Marc Bernacki, Antoine Bouquet, Adrien Catella, Hassan Fahs et Hugo Fol, et deux post-doctorants ; Ronan Perrussel et Gilles Scarella. Je suis aussi encadré par Jean Virieux (professeur, co-directeur de thèse) et ai été en étroite collaboration avec Victor-Manuel Cruz Atienza ; actuellement post-doctorant en géophysique à l'université de San Diego en Californie.

### **1.3 Moi dans ce contexte**

Cette thèse vient à la suite d'un stage que j'ai réalisé en Avril 2004 au sein de l'équipe CAIMAN. Ce stage constituait le projet de fin d'étude d'un mastère (ancien DEA) que j'ai effectué à Lyon. Les résultats du stage ayant été concluants, mes directeurs et moi-même avons pu définir les principaux axes et objectifs de la thèse. Une fois le financement nécessaire attribué, la thèse démarra en Octobre 2004.

Au début, il était clair que je ne connaissais pas bien le sujet, d'autant plus que je n'ai pas suivi de formation en géophysique auparavant. Le stage m'a permis de découvrir cette discipline et m'a donné envie de continuer dans ce thème de recherche. Le fait d'avoir pu bénéficier d'une double expertise en mathématiques et en géophysique par le biais de mes directeurs, ajouté à la bonne ambiance qui régnait dans le groupe, m'a fortement encouragé à entreprendre le défi malgré la difficulté du sujet et mon manque d'expérience dans le domaine de la géophysique.

## **2. Déroulement, gestion et coût du projet**

### **2.1 Préparation et cadrage du projet**

La recherche est un domaine semé d'embûches et plein d'imprévus. Ainsi, il n'est pas toujours aisé d'évaluer à l'avance les facteurs de succès ou de risque dans cette démarche scientifique. Néanmoins, les connaissances apportées par Jean Virieux et Serge Piperno autant sur le plan physique que mathématique sur le sujet, ainsi que l'expertise acquise par l'équipe CAIMAN dans le domaine du calcul scientifique et la modélisation numérique, ont permis de démarrer sur de bonnes bases. Les résultats obtenus au cours du stage qui a précédé la thèse confortait également ce démarrage.

La partie développement a été facilitée par l'existence au préalable de codes ayant servi de base à mon travail. Ces codes ont été validés dans un premier temps par Nathalie Glinsky-Olivier pour le problème de propagation d'onde. J'ai fait ensuite le développement et la validation nécessaire pour le problème de la rupture.

Pour financer ce projet, j'ai bénéficié d'une allocation de recherche dont  $\frac{3}{4}$  provenaient de l'INRIA et  $\frac{1}{4}$  du CNRS.

## 2.2 Conduite du projet

Nous nous étions fixés comme objectif d'étudier et de mettre en place un schéma numérique de type volumes finis (i.e. Galerkin discontinu d'ordre zéro), ainsi que de développer un code 3D parallèle pour la simulation de la rupture dynamique des séismes dans un cadre réaliste.

Pour commencer, il a fallu entreprendre un travail d'assimilation du problème, surtout d'un point de vue physique. Pour cela, les connaissances de Jean Virieux m'ont été d'une grande aide. La collaboration avec son doctorant de l'époque, Victor-Manuel Cruz Atienza, m'a été très précieuse et ses travaux précurseurs m'ont facilité énormément la tâche, puisque les thèmes de nos thèses étaient assez similaires. Par ailleurs, j'ai aussi pu avoir accès à tous les documents dont j'ai eu besoin grâce au centre de documentation localisé sur le site de l'INRIA.

Une fois le cadre physique mis en place, il a fallu étudier d'un point de vue mathématique le phénomène de la rupture. Les conseils et le suivi étroit de Serge Piperno m'ont permis d'avancer sur une bonne voie. J'ai pu ainsi traduire le modèle physique qui nous intéresse dans un cadre mathématique plus formel. Bien sur, cette étape a toujours évolué au fur et à mesure que j'avais dans la thèse et que le problème physique se complexifiait. Cette étude a permis l'écriture d'un schéma numérique basé sur des formulations éléments finis discontinus et de définir les conditions aux limites sur la faille adaptées au problème physique choisi.

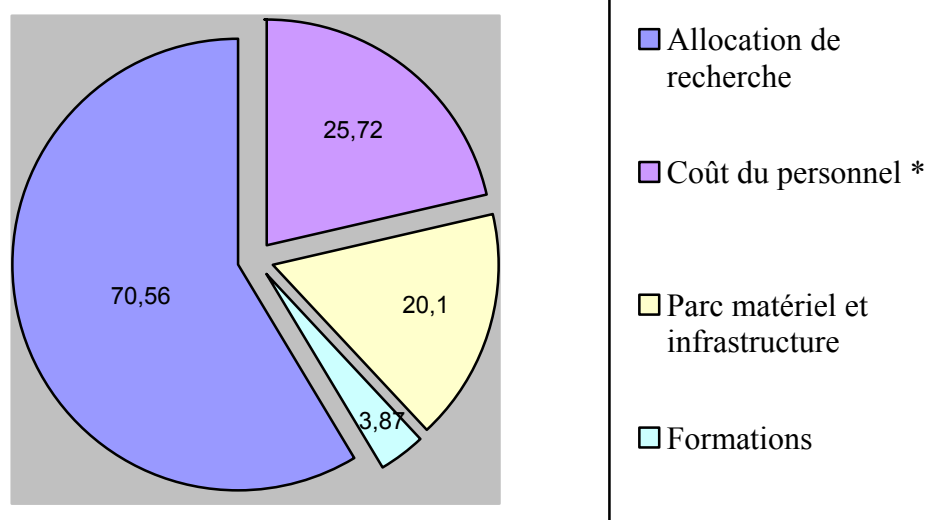
Vient ensuite l'étape de développement qui consiste à établir et valider un code 2D puis un code 3D parallèle basé sur ce schéma numérique. Dans cette étape, j'ai bénéficié du soutien de Nathalie Glinsky-Olivier qui m'a co-encadré tout au long de la thèse, et dont les conseils aussi bien sur un plan scientifique que pédagogique m'ont aidé à plusieurs reprises. J'ai opté pour une démarche allant du simple au compliqué. J'ai donc commencé par le cas bidimensionnel. À mesure que le temps passait, les résultats s'affinaient. La validation de ces derniers s'est en majorité faite en comparaison avec des résultats issus d'une méthode différences finies obtenus par Victor-Manuel Cruz Atienza. J'ai aussi dû améliorer le modèle physique suite aux remarques des rapporteurs d'un article que j'ai soumis entre temps. L'accomplissement de ce travail a nécessité presque les deux premières années de la thèse. La troisième et dernière année a été consacrée au cas tridimensionnel. Ayant déjà surmonté la majorité des difficultés dans le cas bidimensionnel, j'ai commencé cette dernière étape avec plus de connaissances et d'autonomie. J'ai eu par ailleurs quelques échanges avec Stéphane Lanteri qui m'a apporté son aide et son savoir faire sur l'aspect parallélisme dans la programmation, étant donné que j'étais néophyte dans ce domaine. J'ai aussi entrepris le travail de rédaction de la thèse qui s'est avéré une tâche gourmande en temps.

L'encadrement de la thèse se déroulait pendant des réunions entre mes directeurs et moi-même. Ces réunions ont eu lieu principalement dans les locaux de l'INRIA et se tenaient plus ou moins régulièrement en fonction des problèmes que je rencontrais. Durant la dernière année de la thèse, les nouvelles fonctions prises par Serge Piperno l'ont conduit à quitter la région. Ceci n'a pas empêché le fait de se réunir une fois tous les deux mois en moyenne. Nous avons gardé le contact entre temps par des messages électroniques et des conversations téléphoniques. Les réunions étaient l'occasion pour faire le point, analyser les résultats, apporter des solutions aux problèmes et définir les nouveaux objectifs et orientations à suivre. Ceci m'a beaucoup aidé à ne pas trop m'égarer dans le vaste océan de la recherche.

## 2.3 Évaluation et prise en charge du coût du projet

Comme tout projet, la thèse nécessite des ressources humaines et matérielles. Ayant fait partie d'un grand organisme de recherche qu'est l'INRIA, il m'est difficile d'avoir une évaluation exacte du coût qu'a suscité ce projet de thèse. Ainsi, les estimations présentées dans ce qui suit ne sont données qu'à titre indicatif.

Estimation du coût du projet (en milliers d'Euros)



Durant cette thèse, j'ai participé à plusieurs congrès nationaux et internationaux. Le premier en Décembre 2004 à l'IFP Paris. Le deuxième, l'EGU (European Geophysical Union) à Vienne en Avril 2005, et le troisième en Septembre 2006 dans le cadre de l'école des ondes organisé par l'INRIA à Paris. J'ai par ailleurs suivi une série de formations transversales à ma thèse, dont une en informatique en 2005 et deux en anglais en 2006 et 2007. Une estimation des coûts est donnée dans le tableau suivant :

	Transport	Séjour	Inscription	Total
Congrès en France	360 €	280 €	120 €	760 €
Congrès à l'étranger	600 €	800 €	210 €	1610 €
Formations doctorales	0 €	0 €	1500 €	1500 €
<b>Coût total</b>	<b>960 €</b>	<b>1080 €</b>	<b>1830 €</b>	<b>3870 €</b>

\* Ce coût inclus celui de mes directeurs, les post-docs, le personnel administratif et les techniciens.

L'estimation globale du coût de cette thèse est résumée dans le tableau suivant :

	Coût (en milliers d'Euros)
Ressources humaines et matérielles	116,38
Congrès et formations	3,87
Coût total	120,25

### 3. Compétences, savoir faire, qualités professionnelles et personnelles

Cette thèse a été une expérience très enrichissante et m'a donné l'occasion d'acquérir de nouvelles compétences à la croisée de plusieurs disciplines : mathématiques, géophysique et informatique.

#### 3.1 Compétences scientifiques et techniques

La thèse m'a permis d'approfondir mes connaissances en **mathématiques appliquées**. Ces dernières étaient celles issues de ma formation académique, et plus particulièrement en ce qui concerne les schémas numériques, se limitaient à **des méthodes de type différences finies et éléments finis continus**. J'ai eu donc l'occasion d'apprendre des nouvelles méthodes que sont les **méthodes Galerkin discontinus**, et mesurer le potentiel que peuvent apporter ces méthodes dans le domaine de **l'analyse et la simulation numérique** en général.

Le sujet de ma thèse portant sur le problème de la **fracturation des séismes**, j'ai eu aussi l'occasion d'acquérir des connaissances entièrement nouvelles sur la **géophysique** en général, et la **dynamique des ruptures des séismes** en particulier. Avant de commencer la thèse, ces connaissances étaient de l'ordre de la culture générale, et que j'ai pu approfondir au cours de l'avancement du projet. Pour cela, j'ai bénéficié de l'aide et l'expérience de Jean Virieux et de Victor-Manuel Cruz Atienza qui m'ont été d'une grande importance. La publication d'un article dans un journal de géophysique GJI (Geophysical Journal International) a été le couronnement de ces recherches.

Le domaine du **calcul numérique** requiert, outre la maîtrise des méthodes numériques, de bonnes connaissances en **informatique**. J'ai développé durant ce projet un **code 3D avec architecture parallèle** pour la simulation de la propagation de la rupture dynamique des séismes dans un milieu hétérogène. Ce travail constituait un nouveau challenge étant donné que j'étais néophyte dans le domaine du parallélisme. Ce dernier nécessitant des moyens logistiques assez conséquents, et destiné à être partagé entre plusieurs utilisateurs, il a fallu faire preuve d'**organisation** et de **coopération** afin de pouvoir coordonner le travail de chacun.

Par ailleurs, j'ai renforcé mes connaissances en suivant des formations en rapport direct avec ma discipline, à travers des écoles et des conférences, et indirect en suivant des cours d'anglais, d'informatique.

### 3.2 Compétences en gestion de projet

La thèse a été l'opportunité pour moi de **mener un projet sur du long terme**. J'ai acquis ainsi des **compétences méthodologiques** pour pouvoir mener à bien un travail de recherche telles que savoir poser la problématique, cerner les données et les objectifs à atteindre, analyser, proposer des solutions, critiquer, prendre l'initiative quand il fallait, se remettre en question ou faire des choix différents si les résultats ne correspondaient pas aux attentes. C'était aussi l'occasion pour moi d'apprendre à **gérer mon temps**, car souvent l'emploi du temps était extrêmement chargé, et surtout durant la dernière année.

La thèse m'a permis de **rencontrer et d'avoir des échanges** avec des gens travaillant sur plusieurs thèmes de recherches, souvent parallèles et parfois transversales au mien, ce qui a contribué à **renforcer ma culture générale**. À travers les différents séminaires et présentations que j'ai donnés, j'ai appris à **adapter ma communication** en fonction de l'auditoire ciblé, en trouvant un juste milieu entre la présentation du sujet dans sa complexité et les arguments pour l'expliquer plus simplement. Ce constat, bien qu'évident, ne l'est pas toujours sur le plan pratique car il demande un certain recul par rapport à son sujet.

La participation à des activités physiques au sein de l'INRIA m'a permis de faire face à des moments de grande pression et d'apporter un peu d'air frais quand le travail devenait parfois stressant.

### 3.2 Qualités personnelles et professionnelles

Mon intégration dans un groupe de recherche, particulièrement l'équipe CAIMAN, m'a permis **d'accroître mon sens du relationnel** dans le cadre de collaborations professionnelles, mais aussi de **développer des relations privilégiées** avec certaines personnes. L'ambiance et la bonne humeur qui régnaient dans l'équipe m'ont beaucoup aidé à surmonter les obstacles et les moments difficiles. L'interaction avec d'autres équipes de recherches m'a permis d'un autre côté **d'élargir mon cercle de relations**.

La thèse a été aussi l'occasion pour moi **d'aiguiser ma curiosité d'esprit** en m'ouvrant à d'autres disciplines à travers les séminaires, les séminaires croisés, les colloquiums, etc. À une autre échelle, les publications et les conférences données à l'étranger m'ont permis de **m'ouvrir à la communauté internationale** et nouer des liens et contacts avec des spécialistes dans mon domaine de recherche.

J'ai par ailleurs, fais preuve de **rigueur** et de **persévérance**, des qualités indispensables pour mener à bien ce projet. En effet, trouver la solution exacte à un problème donné est rarement le fruit du hasard, et seule une bonne dose de travail et de rigueur permet d'arriver à bout des difficultés en respectant les délais accordés.

## 4. Résultats, impact de la thèse pour le laboratoire et l'équipe

### Pour le laboratoire et l'équipe :

Cette thèse a constitué le début d'une collaboration entre l'équipe CAIMAN de l'INRIA-ENPC et l'équipe DRO de GÉOSCIENCES AZUR. Cette collaboration continue à se poursuivre à travers le recrutement de nouveaux doctorants et post-doctorants.

Elle constitue aussi un axe de recherche dans la collaboration franco-américaine avec l'équipe SDSU (San Diego State University) de l'état de San Diego par le biais de Victor-

Manuel Cruz Atienza. Ce dernier s'est basé sur les résultats obtenus durant cette thèse pour les étendre à des applications plus complexes.

### Sur le plan personnel : Les pistes professionnelles envisagées

#### *A court terme*

Une perspective possible après la thèse serait de poursuivre les travaux de recherche à travers un poste postdoctoral au sein du laboratoire de géophysique interne et de tectonophysique LGIT de Grenoble. Le travail consistera principalement à étendre la méthode numérique appliquée à l'élastodynamique à des schémas Galerkin discontinus d'ordres élevés.

#### *A long terme*

Mon projet professionnel serait d'intégrer le monde industriel. La modélisation et la simulation de la propagation de ruptures dans les matériaux est un domaine qui me semble très passionnant et recherché (notamment dans l'industrie de l'automobile, l'aéronautique, l'industrie pétrolière, etc....) afin d'améliorer les normes de sécurité et la résistance des matériaux.

Ce qui m'a stimulé et motivé durant cette thèse, c'était la découverte d'une discipline complètement nouvelle pour moi qui est la géophysique, et dans laquelle j'ai pu approfondir mes connaissances dans ce domaine. Je pense que le milieu industriel a des attentes et des exigences qui correspondent aux miennes, telles que la polyvalence, l'adaptabilité et la recherche de l'innovation. Pour ces raisons, j'ai décidé d'opter pour une carrière dans le monde industriel plutôt que pour une carrière académique. De ce fait, j'envisage une recherche orientée vers des postes d'ingénieurs d'études et de recherche dans les secteurs de l'industrie de façon assez large.

---

# Références

- [1] J. D. ACHENBACH – *Wave propagation in elastic solids*, Amsterdam, North-Holland, 1973.
- [2] M. AINSWORTH, P. M. P et W. MUNIZ – « Dispersive and dissipative properties of discontinuous Galerkin finite element methods for the second-order wave equation », *Journal of Scientific Computing* **27(1-3)** (2006), p. 5–40.
- [3] K. AKI et L. LARNER – « Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH wave », *J. Geophys. Res.* **75** (1970), p. 1921–1941.
- [4] K. AKI et P. G. RICHARDS – *Quantitative seismology*, W.H. Freeman and company, USA, 1980.
- [5] R. M. ALFORD, K. R. KELLY et D. M. BOORE – « Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation », *Geophysics.* **39** (1974), p. 834–842.
- [6] Z. ALTERMAN et F. C. KARAL – « Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods », *Bull. Seism. Soc. Am.* **58** (1968), p. 367–398.
- [7] G. ALVAREZ, A. LOULA, E. DO CARMO et F. ROCHINHA – « A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation », *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering* **195(33-36)** (2006), p. 4018–4035.
- [8] J. P. AMPUERO – « Étude physique et numérique de la nucléation des séismes », Thèse, Université Paris 7, 2002.
- [9] D. J. ANDREWS – « Rupture propagation with finite stress in antiplane strain », *J. Geophys. Res.* **81** (1976), p. 3575–3582.
- [10] — , « Rupture velocity of plane strain shear cracks », *J. Geophys. Res.* **81** (1976), p. 5679–5687.
- [11] — , « Rupture models with dynamically determined breakdown displacement », *Bull. Seism. Soc. Am.* **94** (2004), p. 769–775.
- [12] L. ANNE, J. CIONI, L. FEZOUÏ et F. POUPAUD – « A parallel FVTD Maxwell solver using 3D unstructured meshes », *13th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics (PIERS)* (1997), p. 359–365.
- [13] H. AOCHI, E. FUKUYAMA et M. MATSU'URA – « Spontaneous rupture propagation of a non planar fault in 3D elastic medium », *PAGEOPH* **157** (2000), p. 2003–2027.



- 
- [14] S. AOKI, K. KISHIMOTO, H. KONDO et M. SAKATA – « Elastodynamic analysis of crack by finite element method using singular element », *Int. J. of Fracture*. **14**(1) (1978), p. 59–68.
  - [15] H. ATKINS – « Continued development of the discontinuous Galerkin method for computational aeroacoustic applications », Tech. Report Va 23681-0001, NASA, Langley Research Center Hampton, 1997.
  - [16] P. Y. BARD et M. BOUCHON – « The two dimensional resonance of sediment filled valleys », *Bull. Seism. Soc. Am.* **75** (1985), p. 519–541.
  - [17] G. I. BARENBLATT – « The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses », *J. App. Math. Mech.* **23** (1959), p. 622–636.
  - [18] — , « The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture », *Adv. Appl. Mech.* **7** (1962), p. 55–80.
  - [19] E. BECACHE – « A variational boundary integral equation method for an elastodynamic antiplane crack », *Int. J. for Numerical Meth. in Eng.* **36**(6) (1993), p. 969–984.
  - [20] E. BECACHE et T. H. DUONG – « A space-time variational formulation for the boundary integral equation in a 2D elastic crack problem », *RAIRO M2AN* **28**(2) (1994), p. 141–176.
  - [21] T. BELYTSCHKO, D. ORGAN et Y. KRONGAUZ – « A coupled finite element-element-free Galerkin method », *Computational Mechanics*. **17**(3) (1995), p. 186–195.
  - [22] M. BENJEMAA – « Étude et résolution de la rupture sismique par une méthode volumes finis dans un milieu bidimensionnel hétérogène », Res. Rep. 5332, INRIA Sophia Antipolis, 2005.
  - [23] M. BENJEMAA, S. PIPERNO et N. GLINSKY – « Étude de stabilité d’un schéma volumes finis pour les équations de l’élastodynamique en maillages non structurés », Res. Rep. 5817, INRIA Sophia Antipolis, 2006.
  - [24] M. BERNACKI, S. LANTERI et S. PIPERNO – « Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, nondiffusive, discontinuous Galerkin methods », *J. of Comp. Acoustics* **14** (2006), p. 57–81.
  - [25] M. BERNACKI et S. PIPERNO – « A dissipation-free time-domain discontinuous Galerkin method applied to three-dimensional linearized Euler equations around a steady-state non-uniform inviscid flow », *Journal of Computational Acoustics* (2006), accepted.
  - [26] P.-O. BOUCHARD – « Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux », Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
  - [27] M. BOUCHON – « Predictability of ground displacement and velocity near an earthquake fault: an example: the Parkfield earthquake of 1966 », *J. Geophys. Res.* **84** (1979), p. 6149–6156.

- 
- [28] M. BOUCHON et K. AKI – « Near-field of a seismic source in layered medium with irregular interfaces », *Geophys. J. R. astr. Soc.* **50** (1977), p. 669–684.
  - [29] S. BRENNER et L. SCOTT – *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2005.
  - [30] H. D. BUI – *Mécanique de la rupture fragile*, Masson. Paris, 1978.
  - [31] R. BURRIDGE – « The numerical solutions of certain integral equations with non integrable kernels arising in the theory of crack propagation and elastic wave diffraction », *Philos. Trans. Roy. Soc. London.* **A265** (1969), p. 353–381.
  - [32] — , « Admissible speeds for plain-strain self-similar shear cracks with friction but lacking cohesion », *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **35** (1973), p. 439–455.
  - [33] R. BURRIDGE et J. R. WILLIS – « The self similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid », *Proc. Camb. Phil. Soc.* **66** (1969), p. 443–468.
  - [34] M. CAMPILLO et I. IONESCU – « Initiation of antiplane shear instability under slip dependant friction », *J. Geophys. Res.* **102(20)** (1997), p. 363–371.
  - [35] Y. CAPDEVILLE, E. CHALJUB, J.-P. VILOTTE et J. P. MONTAGNER – « Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in realistic 3D global earth models », *Geophys. J. Int.* **152** (2003), p. 34–68.
  - [36] B. CHALINDAR – « Condition aux limites artificielles pour les équations de l'élastodynamique », Thèse, Université Saint etienne, 1987.
  - [37] E. CHALJUB, Y. CAPDEVILLE et J.-P. VILOTTE – « Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere: a parallel spectral element approximation on non-conforming grids », *J. Comput. Phys.* **187** (2003), p. 457–491.
  - [38] M. CHEN, B. COCKBURN et F. REITICH – « High-order RKDG methods for computational electromagnetics », *Journal of Scientific Computing* **22** (2005), p. 205–226.
  - [39] S. CHEN et C. SHU – « The heterogeneous multiscale method based on the discontinuous Galerkin method for hyperbolic and parabolic problems », *Multiscale Modeling and Simulation* **3** (2005), p. 871–894.
  - [40] Z. CHEN – *Finite Element Methods and Their Applications*, Springer. Scientific Computation, 2005.
  - [41] W. C. CHEW et Q. LIU – « Perfectly Matched Layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition », *J. Comput. Acoust.* **4(4)** (1996), p. 341–359.
  - [42] M. COCCO et A. BIZZARRI – « On the slip weakening behavior of rate and state dependent constitutive laws », *Geophys. Res. Lett.* **29(11)** (2002), p. 1–4.
  - [43] B. COCKBURN, F. COQUEL et P. G. LEFLOCH – « An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws », *Math. Comput.* **63** (1994), p. 77–103.
  - [44] B. COCKBURN, G. E. KARNIADAKIS et C. W. SHU – *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications*, Springer. Lecture Notes in Computational Science and Engineering., 2000.

- 
- [45] B. COCKBURN, D. SCHOTZAU et J. WANG – « Discontinuous Galerkin methods for incompressible elastic materials », *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering* **195(25-28)** (2006), p. 3184–3204.
  - [46] G. COHEN, P. JOLY, J. ROBERTS et N. TORDJMAN – « Higher-order triangular finite elements with mass-lumping for the wave equation », *SIAM*. **38(6)** (2001), p. 2047–2078.
  - [47] F. COLLINO et C. TSOGKA – « Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media », Res. Rep. RR-3471, INRIA, 1998.
  - [48] — , « Application of the pml absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media », *Geophysics* **66(1)** (2001), p. 294–307.
  - [49] V. M. CRUZ-ATIENZA – « Rupture dynamique des faille non-planaires en différences finies », Thèse, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2006.
  - [50] V. M. CRUZ-ATIENZA et J. VIRIEUX – « Dynamic rupture simulation of nonplanar faults with a finite difference approach », *Geophys. J. Int* **158** (2004), p. 939–954.
  - [51] V. M. CRUZ-ATIENZA, J. VIRIEUX et H. AOCHI – « 3D finite difference dynamic rupture modelling along non-planar faults », *Geophys. J. Res. accepted* (2007), p. .
  - [52] H. DANTONG et L. T. LONNY – « Adaptive time-discontinuous Galerkin finite element methods for acoustic scattering », *Acoust. Soc. Am. J.* **113(4)** (2003), p. 2252–2252.
  - [53] S. DAS et K. AKI – « Fault plane with barriers: a versatile earthquake model », *J. Geophys. Res.* **82** (1977), p. 5658–5670.
  - [54] S. DAS et C. H. SCHOLTZ – « Theory of time-dependant rupture in the earth », *J. Geophys. Res.* **86** (1981), p. 6039–6051.
  - [55] S. M. DAY – « Finite element analysis of seismic scattering problems », Thèse, University of California. San Diego., 1977.
  - [56] S. DAY, L. A. DALGUER, N. LAPUSTA et Y. LIU – « Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture », *J. Geophys. Res.* **110** (2005), p. B12307.
  - [57] N. DEICHMANN – « Far-field pulse shapes from circular sources with variable rupture velocities », *Bull. Seism. Soc. Am.* **87** (1997), p. 1288–1296.
  - [58] J. H. DIETERICH – « Modeling of rock friction : 1. Experimental results and constitutive equations », *J. Geophys. Res.* **84** (1979), p. 2161–2168.
  - [59] — , « Constitutive properties of faults with simulated gouge », In N. Carter, M. Friedman, J. Logan, et D. Sterns (Eds.). *Mechanical behavior of crustal rocks (Am. Geophys. Union ed.)* **24** (1981), p. 103–120.
  - [60] — , « Earthquake nucleation on fault with rate and state dependent strength », *Tectonophysics*. **211** (1992), p. 115–134.

- 
- [61] — , « A constitutive law for rate of earthquake production and its application to earthquake clustering », *J. Geophys. Res.* **99** (1994), p. 2601–2618.
  - [62] E. DORMY et A. TARANTOLA – « Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method », *J. Geophys. Res.* **100** (1995), p. 2123–2133.
  - [63] D. C. DUGDALE – « Yielding of steel sheets containing slits », *J. Mech. Phys. Solids.* **8** (1960), p. 100–104.
  - [64] M. DUMBSER et M. KÄSER – « An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes II: The Three-Dimensional Isotropic Case », *Geophys. J. Int.* **167**(1) (2006), p. 319–336.
  - [65] G. DUVAUT et J. L. LIONS – « Élasticité avec frottement », *Journal de mécanique.* **10**(3) (1971), p. 409–420.
  - [66] — , *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod Paris, 1972.
  - [67] A. ERN et J.-L. GUERMOND – *Éléments finis : théorie, application, mise en œuvre*, Springer. SMAI, 2004.
  - [68] R. E. EWING, T. LIN et Y. LIN – « On the accuracy of the finite volume element method based on piecewise linear polynomials », *SIAM. J. Num. Anal.* **39**(6) (2002), p. 1865–1888.
  - [69] R. EYMARD, T. GALLOUET et R. HERBIN – « Finite volume methods », *Handbook of Numerical Analysis, North Holland. Amsterdam.* **7** (2000), p. 713–1020.
  - [70] E. F. FACCIOLO, R. PAOLUCCI et A. QUATERONI – « 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method », *J. Seism.* **1** (1997), p. 237–251.
  - [71] H. FAHS, S. LANTERI et F. RAPETTI – « A hp-like discontinuous Galerkin method for solving the 2D time-domain Maxwell’s equations on non-conforming locally refined triangular meshes », Res. Rep. 6162, INRIA Sophia Antipolis, 2007.
  - [72] L. FEZOU, S. LANTERI, S. LOHRENGEL et S. PIPERNO – « Convergence and Stability of a Discontinuous Galerkin Time-Domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes », *M2AN* **39**(6) (2005), p. 1149–1176.
  - [73] T. FOGARTY et R. J. LEVEQUE – « High resolution finite volume methods for acoustic waves in periodic and random media », *J. Acoust. Soc. Am.* (1999), p. 17–28.
  - [74] L. B. FREUND – *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press, 1990.
  - [75] K. O. FRIEDRICHS – « Symmetric hyperbolic linear differential equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **7** (1954), p. 345–392.
  - [76] — , « Symmetric positive linear differential equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **11** (1958), p. 333–418.
  - [77] P. GEUBELLE et J. R. RICE – « A spectral method for 3D elastodynamic fracture problems », *J. Mech. Phys. Solids.* **43** (1995), p. 791–824.
  - [78] M. E. GURTIN – *The linear theory of elasticity*, Springer-Verlag, 1972.

- 
- [79] L. HALPERN – « Étude de condition aux limites absorbantes pour des schémas numériques relatifs à des équations hyperboliques linéaires », Thèse, Université Pierre et Marie Curie. Paris 6, 1990.
  - [80] R. A. HARRIS, R. ARCHULETA, B. AAGAARD, J. P. AMPUERO, D. J. ANDREWS, L. DALGUER, S. DAY, E. DUNHAM, G. ELY, Y. KASE, N. LAPUSTA, Y. LIU, S. MA, D. OGLESBY, K. OLSEN et A. PITARKA – « The source physics of large earthquakes: Validating spontaneous rupture methods », *Eos Trans. AGU, Fall Meet. Suppl.* **85(47)** (2004), p. S12A–05.
  - [81] N. A. HASKELL – « Radiation pattern of surface waves from point source in a multi-layered medium », *Bull. Seism. Soc. Am.* **54** (1964), p. 377–394.
  - [82] — , « Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults II », *Bull. Seism. Soc. Am.* **56** (1966), p. 125–140.
  - [83] — , « Elastic displacements in the near-field of a propagating fault », *Bull. Seism. Soc. Am.* **59** (1969), p. 865–908.
  - [84] J. S. HESTHAVEN – « High-order accurate methods in time-domain computational electromagnetics: A review », *Advances in Imaging and Electron Physics* **127** (2003), p. 59–123.
  - [85] J. S. HESTHAVEN et T. WARBURTON – « Nodal high-order methods on unstructured grids - I. Time-domain solution of Maxwell’s equations », *Journal of Computational Physics* **181** (2002), p. 186–221.
  - [86] — , *Nodal Discontinuous Galerkin methods: Algorithms, Analysis, and Applications*, Springer Texts in Applied Mathematics, Springer Verlag, New York, 2007.
  - [87] H. HUANG et F. COSTANZO – « On the use of space-time finite elements in the solution of elasto-dynamic fracture problems », *Int. J. of fracture* **127** (2004), p. 119–146.
  - [88] T. HUGHES et J. R. HUGHES – *The Finite Element Method- Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, 2000.
  - [89] T. J. R. HUGHES et G. M. HULBERT – « Space-time finite element methods for elastodynamics: formulations and error estimates », *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engineering* **66(3)** (1988), p. 339–363.
  - [90] M. HUSSEINI, D. JOVANOVITCH, M. RANDALL et L. FREUND – « The fracture energy of earthquakes », *Geophys. J. Roy. Astron. Soc. Am.* **43** (1975), p. 367–385.
  - [91] D. V. HUTTON – *Fundamentals of Finite Element Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2003.
  - [92] Y. IDA – « Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and Griffith’s specific surface energy », *J. Geophys. Res.* **77** (1972), p. 3796–3805.
  - [93] I. R. IONESCU, D. ONOFREI et B. VERNESCU – «  $\Gamma$ -convergence for a fault model with slip-weakening friction and periodic barriers », *Quart. Appl. Math.* **63** (2005), p. 747–778.

- 
- [94] T. JOHNSON – « Time dependent friction of granite : implications for precursory slip on faults », *J. Geophys. Res.* **86** (1981), p. 6017–6028.
  - [95] M. KÄSER et M. DUMBSER – « An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes I: The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms », *Geophys. J. Int.* **166**(2) (2006), p. 855–877.
  - [96] M. KÄSER, M. DUMBSER, J. DE LA PUENTE et H. IGEL – « An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes III: Viscoelastic Attenuation », *Geophys. J. Int.* **168**(1) (2007), p. 224–242.
  - [97] K. R. KELLY, R. W. WARD, S. TREITEL et R. M. ALFORD – « Synthetic seismograms: a finite difference approach », *Geophysics.* **49** (1976), p. 607–619.
  - [98] M. G. KOLLER, M. BONNET et R. MADARIAGA – « Modelling of dynamical crack propagation using time-domain boundary integral equations », *Wave Motion* **16** (1992), p. 339–366.
  - [99] D. KOMATITSCH et J. TROMP – « Introduction to the spectral element method for 3D seismic wave propagation », *Geophys. J. Int.* **139** (1999), p. 806–822.
  - [100] D. KOMATITSCH et J. P. VILOTTE – « The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures », *Bull. Seism. Soc. Am.* **88** (1998), p. 368–392.
  - [101] B. V. KOSTROV – « Self similar problems of propagation of shear cracks », *J. Appl. Math. Mech. (PMM)* **30** (1964), p. 1241–1248.
  - [102] — , « Unsteady propagation of longitudinal shear cracks », *J. Appl. Math. Mech (PMM)* **30** (1966), p. 1042–1049.
  - [103] — , « Crack propagation at variable velocity », *J. Appl. Math. Mech (PMM)* **38**(3) (1974), p. 551–560.
  - [104] D. KRÖNER, S. NOELLE et M. ROKYTA – « Convergence of higher order upwind finite volume schemes on unstructured grids for conservation laws in several space dimensions », *Num. Math.* **71** (1995), p. 527–560.
  - [105] T. L. LEISE et J. R. WALTON – « An analytical and numerical study of a dynamically accelerating semi-infinite crack in a linear viscoelastic material », *Int. J. Frac.* **127**(2) (2004), p. 101–117.
  - [106] R. LEVEQUE – *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge university press, UK, 2002.
  - [107] S. LOHRENGEL et M. REMAKI – « A FV scheme for Maxwell’s equations. Convergence analysis on unstructured meshes », *Finite Volumes for Complex Applications III, R. Herbin, D. Kroner eds, Kogan Page* (2002), p. 219–226.
  - [108] H. LU, M. BERZINS et C. E. GOODYER – « High-order discontinuous Galerkin method for elastohydrodynamic lubrication line contact problems », *Communications in Numerical Methods in Engineering* **21** (2005), p. 643–650.

- 
- [109] R. MADARIAGA – « Seismic energy radiation from dynamic faulting », *In Chapman conference on radiated energy and the physics of earthquake faulting*, Portland, Maine, EUA, 2005.
  - [110] R. MADARIAGA et J. P. AMPUERO – « Rupture dynamics of geometrically complex fault », *In EOS transactions. S34A-01.*, vol. 86, American Geophysical Union., 2005.
  - [111] R. MADARIAGA, K. B. OLSEN et R. J. ARCHULETA – « Modeling dynamic rupture in a 3D earthquake fault model », *Bull. Seism. Soc. Am.* **88** (1998), p. 1182–1197.
  - [112] K. J. MARFURT – « Accuracy of finite difference and finite element modeling of the scalar and elastic wave equations », *Geophysics.* **49** (1984), p. 533–549.
  - [113] C. MARONE et B. KILGORE – « Scaling of the critical slip distance for seismic faulting with shear strain in fault zones », *Nature.* **362** (1993), p. 618–621.
  - [114] C. MARONE, C. RALEIGH et C. SCHOLZ – « Frictional behavior and constitutive modeling of simulated fault gouge », *J. Geophys. Res.* **95** (1990), p. 7007–7025.
  - [115] M. MATSU'URA, H. KATAOKA et B. SHIBAZAKI – « Slip-dependant friction law and nucleation processes in earthquake rupture », *Tectonophysics.* **211** (1992), p. 135–148.
  - [116] S. NIELSEN et R. MADARIAGA – « On the self-healing fracture mode », *Bull. Seism. Soc. Am.* **93** (2003), p. 2375–2388.
  - [117] S. B. NIELSEN – « Free surface effect on the propagation of dynamic rupture », *Geophys. Res. Lett.* **25** (1998), p. 125–128.
  - [118] D. D. OGLESBY, R. J. ARCHULETA et S. B. NIELSEN – « Earthquakes on dipping faults: the effect of broken symmetry », *Science* **280** (1998), p. 1055–1059.
  - [119] — , « The three dimensional dynamics of dipping faults », *Bull. Seism. Soc. Am.* **90** (2000), p. 616–628.
  - [120] M. OHNAKA – « Experimental studies of stick-slip and their application to the earthquake source mechanism », *J. Phys. Earth.* **21** (1973), p. 285–303.
  - [121] — , « Dynamic breakdown processes and the generating mechanism for high frequency elastic radiation during stick-slip instabilities », *In S. Das, J. Boatwright, et C. Scholz (Eds.), Earthquakes Source Mechanics (Union Monogr. ed.)* **24** (1986), p. 13–24.
  - [122] M. OHNAKA et L. SHEN – « Scaling of the shear rupture process from nucleation to dynamic propagation : implications of geometric irregularity of the rupturing surfaces », *J. Geophys. Res.* **104** (1999), p. 817–844.
  - [123] M. OHNAKA et K. YAMAMOTO – « Experimental studies of failure nucleation and propagation along simulated faults in rock, study on short period behavior in fault motion and estimation of input seismic motion », Final Tech. Rep. A-59-3, Univ Tokyo, 1984.

- 
- [124] P. OKUBO et J. DIETERICH – « Effects of physical fault properties on frictional instabilities produced on simulated faults », *J. Geophys. Res.* **89** (1984), p. 5817–5827.
  - [125] S. OSHER – « Convergence of generalized MUSCL schemes », *SIAM. J. Num. Anal.* **22(5)** (1985), p. 947–961.
  - [126] G. PERRIN, J. R. RICE et G. ZHENG – « Self-healing slip pulse on a frictional surface », *J. Mech. Phys. Solids*. **43** (1995), p. 1461–1495.
  - [127] M. PETER et R. R. GERARD – « A Discontinuous Galerkin Method for Linear Symmetric Hyperbolic Systems in Inhomogeneous Media », *Journal of Scientific Computing* **22-23** (2003), p. 443–477.
  - [128] R. S. PHILLIPS et L. SARASON – « Singular symmetric positive first order differential operators », *J. Math. Mech* **15** (1966), p. 235–272.
  - [129] S. PIPERNO – « Symplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problems », *M2AN. to appear*.
  - [130] — , « DGTD methods using modal basis functions and symplectic local time-stepping: application to wave propagation problems », Res. Rep. 5749, INRIA Sophia Antipolis, 2005.
  - [131] S. PIPERNO, M. REMAKI et L. FEZOU – « A non-diffusive finite volume scheme for the 3D maxwell equations on unstructured meshes », *SIAM J. Numer. Anal.* **39** (2002), p. 2089–2108.
  - [132] J. D. LA PUENTE, M. KÄSER, M. DUMBSER et H. IGEL – « An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes IV: Anisotropy », *Geophys. J. Int.* **169(3)** (2007), p. 1210–1228.
  - [133] W. REED et T. HILL – « Triangular mesh methods for the neutron transport equation », Tech. Rep. LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
  - [134] M. REMAKI – « Méthodes numériques pour les équations de Maxwell stationnaires en milieu hétérogène », Thèse, École nationale des ponts et chaussées, 1999.
  - [135] — , « A new finite volume scheme for solving maxwell system », *COMPEL* **19(3)** (2000), p. 913–932.
  - [136] Y. RENARD – « A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction », *Siam J. Math. Anal.* **38(2)** (2006), p. 452–467.
  - [137] J. RÉTHORÉ, A. GRAVOUIL et A. COMBESURE – « An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **63(5)** (2005), p. 631–659.
  - [138] P. G. RICHARDS – « The dynamic field of a growing plane elliptical shear crack », *Int. J. Solid. Structures* **9** (1973), p. 843–861.
  - [139] — , « Dynamic motions near an earthquake fault: a three dimensional solution », *Bull. Seism. Soc. Am.* **66** (1976), p. 1–32.



- 
- [140] A. RUINA – « Slip instability and state variable friction laws », *J. Geophys. Res.* **88** (1983), p. 10359–10370.
  - [141] P. L. SAINT et P. RAVIART – « On a finite element method for solving the neutron transport equation », *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations* (I. C. de Boor, éd.), Academic press, New-York (1974), p. 89–145.
  - [142] F. J. SÁNCHEZ-SESMA et F. LUZÓN – « Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S, and Rayleigh waves », *Bull. Seism. Soc. Am.* **85** (1995), p. 269–284.
  - [143] F. J. SANCHEZ-SESMA et U. I. VIVEROS – « The classic Garvins problem revisited », *Bull. Seism. Soc. Am.* **96**(4) (2006), p. 1344–1351.
  - [144] T. SATO et T. HIRASAWA – « Body wave spectra from propagating shear cracks », *J. Phys. Earth.* **21** (1973), p. 415–431.
  - [145] T. SATO et H. KANAMORI – « Beginning of earthquakes modeled with griffith’s fracture criterion », *Bull. Seism. Soc. Am.* **89** (1999), p. 80–93.
  - [146] J. C. SAVAGE – « Radiation from a realistic model of faulting », *Bull. Seism. Soc. Am.* **56** (1966), p. 577–592.
  - [147] D. SERRE – *Systèmes de lois de conservation. Tome 1 et 2*, Diderot, Paris, 1996.
  - [148] B. SHIBAZAKI et M. MATSU’URA – « Spontaneous process for nucleation, dynamic propagation and stop of earthquake rupture », *Geophys. Res. Lett.* **19** (1992), p. 189–192.
  - [149] H. J. STAM et A. T. D. HOOP – « Theoretical considerations on a finite-element method for the computation of three-dimensional space-time elastodynamic wave field », *Wave motion* **12**(1) (1990), p. 67–80.
  - [150] S. Y. SUN et M. F. WHEELER – « Symmetric and nonsymmetric discontinuous galerkin methods for reactive transport in porous media », *SIAM Journal in Numerical Analysis* **43** (2005), p. 195–219.
  - [151] E. TESSMER, D. KOSLOFF et A. BEHLE – « Multi domain Chebychev Fourier method for the solution of the equation of motion of dynamic elasticity », *J. Compu. Phys.* **100** (1992), p. 355–363.
  - [152] I. TOULOPOULOS et J. A. EKATERINARIS – « High-order discontinuous Galerkin discretizations for computational aeroacoustics in complex domains », *AIAA Journal* **44** (2006), p. 502–511.
  - [153] C. TSOGKA – « Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés », Thèse, Université Paris Dauphine, 1999.
  - [154] T. TULLIS et J. WEEKS – « Constitutive behavior and stability of frictional sliding of granite », *Pure Appl. Geophys.* **124** (1986), p. 383–414.

- 
- [155] J. P. VILA – « Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation law I: Explicit monotone schemes », *RAIRO, Modelisation Math. Anal. Num.* **28** (1994), p. 267–295.
  - [156] J. P. VILOTTE, G. FESTA et R. MADARIAGA – « Spectral element simulations of rupture dynamics along kinked faults », *In EOS transactions. S34A-02.*, vol. 86, American Geophysical Union., 2005.
  - [157] J. VIRIEUX – « P-SV wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress finite difference method », *Geophysics*. **51** (1986), p. 889–901.
  - [158] J. VIRIEUX et R. MADARIAGA – « Dynamic faulting studied by a finite difference method », *Bull. Seism. Soc. Am.* **72** (1982), p. 345–369.
  - [159] C. VOISIN, I. IONESCU et M. CAMPILLO – « Crack growth resistance and dynamic rupture arrest under slip dependent friction », *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. **131** (2002), p. 279–294.
  - [160] C. Y. WANG et J. D. ACHENBACH – « Lamb’s problem for solids of general anisotropy », *Wave Motion*. **24** (1996), p. 227–242.
  - [161] X.-M. WANG, S. GEZA et W.-J. LIN – « Some theoretical aspects of elastic wave modeling with a recently developed spectral element method », *Science in China Series G: Physics Mechanics and Astronomy* **50** (2007), p. 185–207.
  - [162] W. WU et X. K. LI – « Application of the time discontinuous Galerkin finite element method to heat wave simulation », *International Journal of Heat and Mass Transfer* **49(9-10)** (2006), p. 1679–1684.
  - [163] Y. XU et C. SHU – « Local discontinuous Galerkin methods for nonlinear Schrodinger equations », *Journal of Computational Physics* **205** (2005), p. 72–97.
  - [164] L. F. ZENG et N.-E. WIBERG – « Spatial mesh adaptation in semidiscrete finite element analysis of linear elastodynamic problems », *Computational Mechanics* **9(5)** (1992), p. 315–332.
  - [165] J. ZHANG – « Quadrangle-grid velocity-stress finite difference method for elastic wave propagation simulation », *Geophys. J. Int.* **131** (1997), p. 127–134.
  - [166] — , « Elastic wave modeling in fractured media with an explicit approach », *Geophysics* **70** (2005), p. 75–85.
  - [167] O. ZIENKIEWICZ et R. TAYLOR – *The Finite Element Method, II, Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Nonlinearity*, McGraw-Hill, London, 1991.





# Résumé

Ce travail est dédié à l'étude et la simulation numérique de la rupture dynamique des séismes en deux et trois dimensions d'espace par une méthode d'éléments finis discontinus. Après avoir transformé le système de l'élastodynamique en un système hyperbolique symétrique du premier ordre, nous proposons un schéma numérique basé sur des flux centrés et un schéma explicite en temps de type saute-mouton. À travers l'étude d'une énergie discrète du système, nous spécifions les conditions aux limites sur la faille afin de prendre en compte de manière faible la rupture en mode cisailant que nous traitons. Nous montrons, qu'en l'absence de tractions tangentielles sur la faille, cette énergie est parfaitement conservée. Nous illustrons la capacité de notre méthode à travers divers cas tests sur des configurations complexes grâce à une implémentation parallèle.

**Mots-clés :** Élastodynamique, rupture dynamique, loi de frottement, méthode de type Galerkin discontinu en domaine temporel, maillages non structurés, implémentation parallèle.

---

# Abstract

This work is devoted to the study and the numerical simulation of 2D and 3D dynamic crack rupture by a discontinuous Galerkin finite element method. The initial partial differential equations are transformed in order to get a symmetric pseudo-conservative form, for which we design a discontinuous Galerkin formulation with centered numerical fluxes and explicit leap-frog time scheme. Throughout the study of a discrete energy, we specify in a weak sense the boundary conditions on the fault surface for the shear rupture mode. We demonstrate that this energy is conserved when no traction is applied on the fault. We investigate various complex test-cases and we compare our solutions with those obtained by other methods. The fine agreement with other results validates our approach and illustrates the good behavior of the method we propose.

**Keywords :** Elastodynamics, dynamic rupture, slip weakening friction law, discontinuous Galerkin finite element method, non-structured meshes, parallel implementation.